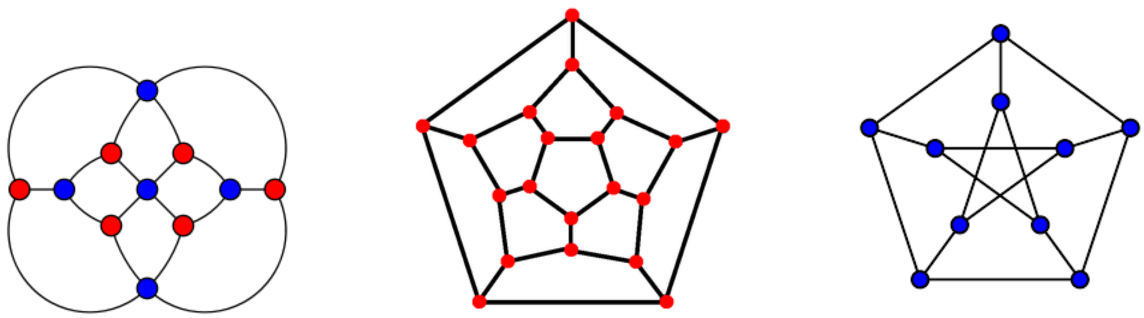
Úloha 1

Prvé štyri úlohy sú o konštruktívnom riešení existenčnej úlohy, zvyšné úlohy sú na nekonštruktívne riešenie pomocou Dirichletovho princípu.

1. Navrhnite okružnú prechádzku mestom, alebo vysvetlite prečo taká prechádzka nie je možná.



Obr. 1: mesto Herschel, mesto dvanásťsten a mesto Petersen(prevzaté z WIKI)

2. Bilaterálne rokovania. Úlohou je navrhnúť rozvrh bilaterálnych rokovaní piatich senátorov A, B, C, D, E, ktorý vyhovuje takémuto zadaniu: jeden z účastníkov každého rokovania (okrem posledného rokovania) sa zúčastní na nasledujúcom rokovanía a nikto sa nezúčastní troch po sebe idúcich rokovaní. Rokovať zamýšľa senátor A so senátormi B, C, E; senátor B so senátormi A, C, D, E; senátor C so senátormi A, B, D, E; D potrebuje rokovať senátormi B, C a senátor E so senátormi A, B, C.

3. A mouse eats his way through a $3 \times 3 \times 3$ cube of cheese by tunnelling through all the 27 $1 \times 1 \times 1$ subcubes. If he starts in one corner and always moves on an uneaten subcube, can he finish at the center of the cube?(Bondy, Murty: Graph thheory with applications)

4. V počítačovej miestnosti je 15 počítačov a 10 tlačiarní. Každých 5 minút desať počítačov potrebuje tlačiareň, pričom tlačiareň môže v danom čase používať najviac jeden počítač. Navrhnite optimálnu schému prepojení počítačov s tlačiarňami, t.j. schému s najmenším možným počtom prepojení ktorý garantuje, že počítač má k dispozícii tlačiareň vždy keď ju potrebuje.

5. Na šachovnici sú vyrezané dva koncové rohy hlavnej diagonály. Je možné šachovnicu pokryť dominom tak, aby každé domino pokrývalo presne dve polia a žiadne dve dominá sa neprekrývali?

6. Desať manželských párov sa ubytovalo na chate na Popradskom plese a ráno jedenásti z týchto dvadsiatich nastúpili na výlet po trase Ostrvá, Batizovské pleso, Sliezsky dom, Hrebienok a späť. Nájde sa medzi výletníkmi aspoň jeden manželský pár?

7. V každej spoločnosti aspoň dvoch ľudí sa nájdu dvaja s rovnakým počtom známych (v tejto spoločnosti). (Predpokladáme, že ak "Jano pozná Miša", tak "Mišo pozná Jana" a nikto nie je "známy" sám sebe.)

8. V rovine je daných 5 bodov, pričom žiadne tri neležia na tej istej priamke. Potom štyri z nich tvoria vrcholy konvexného štvoruholníka. Dokážte.

9. Galaxiu Andromeda obýva 101 druhov vysoko inteligentných tvorov. Farba očí každého druhu má niektorú z 10 farieb a rovnako, farba vlasov každého druhu má jednu z 10 farieb. Ukážte, že sa nájdu dva druhy s rovnakoo farbou očí a aj rovnakou farbou vlasov.

10. Reštaurátori zreštaurovali 36 sôch, po jednej s váhou 490 kg, 495 kg, 500 kg, ..., a 665 kg. Je možné presunúť tieto sochy v siedmych nákladiakoch, keď kapacita každého auta je 3 tony a ak každý nákladiak môže uskutočniť len jednu jazdu a nesmie byť preťažený?

11. Tabuľka 6×6 pozostáva z 36 štvorčekov rozmeru 1×1. Do každého štvorčeka je vpísané jedno z čísel $0, 1, -1$. Ukážte, že keď sa pozrieme na súčet čísel v každom riadku, na súčet čísel v každom stĺpci a aj na súčet čísel na každej diagonále, tak dva z týchto súčtov budú rovnaké.

12. Dokážte , že pre každé dve nesúdeliteľné celé čísla $a, b \geq 1$ existujú celé čísla u, v s vlastnosťou $ua + vb = 1$.

    Pomôcka: Uvažujte zvyšky čísel $b, 2b, \ldots, (a-1)b$ po delení číslom a.

13. Do skúšky vám zostáva 37 dní. Viete, že stačí ak budete študovať 60 hodín (čistého času). Aby toho nezostalo veľa na poslednú chvíľu, rozhodli ste sa študovať aspoň 1 hodinu denne. Dokážte, že nech zvolíte akýkoľvek postup pre štúdium v rámci týchto pravidiel, nájde sa taká postupnosť po sebe idúcich dní, že počas nich budete študovať spolu presne 13 hodín. Predpokladáme, že dĺžka štúdia v jeden deň je daná v celých hodinách. Pomôcka: Môžete konzultovať skriptá M. Knor, Priklad 3, kapitola Slabá forma Dirichletovho princípu.) Ako by to dopadlo keď číslo 13 nahradíme číslom 14?

14. V miestnosti je 10 ľudí vo veku od 1 do 60 rokov (vek rátame na celé roky). Dokážte, že z týchto ľudí môžeme vybrať dve rovnako staré skupiny (nikto nebude v oboch). Vek skupiny je súčtom vekov jej členov.

15. Ukážte, že ak náhodne zvolíme viac ako polovicu zo všetkých podmnožín n-prvkovej množiny, tak sa medzi nimi nájdu dve také, že jedna je podmnožinou druhej.

Pomôcka: Nech M je n-prvková množina. Stačí uvažovať prípad $n \geq 1$. Zvolme prvok $a \in M$. Každá podmnožina množiny M buď prvok a obsahuje, alebo ho neobsahuje. Takže podmnožiny množiny M môžeme dať do dvojíc $\{X, X \cup \{a\}\}$. Koľko dvojíc sme utvorili?

16. V miestnosti je $(m-1)n+1$ ľudí. Ukážte, že sa medzi nimi nájde m takých, že akýkoľvek dvaja z nich sa nepoznajú, alebo sa nájde niekto kto pozná aspoň n z nich. Predpokladáme, že vzťah "poznať" je symetrický a je ireflexívny (t.j. nikto nie je známy sám sebe).

17. Dvaja hráči, Modrý a Červený hrajú hru. Jeden nakreslí 6 bodov na papieri tak, aby žiadne tri neležali na tej istej priamke(napríklad vrcholy pravidelného 6 uholníka). Prehrá ten hráč, ktorý prvý nakreslí jednofarebný trojuholník(s vrcholmi v nakreslených bodoch). Ukážte, že hra nemôže skončiť remízou. Ako by to dopadlo pre 5 bodov?

18. Na papieri je nakreslených desať bodov tak, že žiadne dva neležia na tej istej priamke. Niekto pospájal navzájom dvojice týchto bodov a každé spojenie zafarbil jednou z dvoch farieb, povedzme modrou a červenou. Ukážte, že sa v tomto zafarbení nájde modrý trojuholník (s vrcholmi v daných bodoch), alebo sa nájdu štyri body (spomedzi daných desiatich bodov) navzájom pospájané červenou farbou. Potom ukážte, že rovnaká situácia nastane keď "desať bodov" nahradíte s "deväť" bodov. Ako by to dopadlo pre osem bodov?

19. Sedemnásť vedcov si navzájom dopisuje o troch témach, teda každí dvaja na jednu. Dokážte, že aspoň traja z nich si píšu o tej istej téme. Ako by to dopadlo keby si dopisovali šesnásti?

20. Vojaci pochodujú v m radoch, pričom v každom rade je n vojakov. V každom rade sú zoradení zľava do prava od najnižsieho po najvyššieho. Veliteľ sa rozhodol, že chce takto usporiadať aj zástupy tak, že každý zástup preusporiada. (Teda zloženie zástupov sa nezmení, zmení sa v nich len poradie.) Keď skončí, tak je každý zástup zoradený spredu dozadu od najnižsieho po najvyššieho. Dokážte, že rady si zachovajú svoj "rastúci" charakter zľava do prava.

21. V rovine je daných šesť kruhov, pričom žiadny z nich neobsahuje stred iného kruhu. Potom majú prázdny prienik.

22. Predpokladajme, že každý bod roviny je zafarbený jednou z k farieb. Dokážte, že existuje obdĺžnik, ktorého všetky vrcholy sú zafarbené tou istou farbou.
Pomôcka: uvažujte navzájom rôzne, rovnobežné priamky $p_1, \ldots, p_{k+1}$. Na p_1 sa nájde aspoň $k^{k+1}+1$ bodov rovnakej farby. Týmito bodmi veďte kolmice na p_1. Čo vieme povedať o počte rovnako zafarbených priesečníkov týchto kolmíc s priamkou p_2? Uvážte tie kolmice, ktoré vedú týmito

rovnako zafarbenými priesečníkmi. Čo vieme povedať o počte rovnako zafarbených priesečníkov týchto kolmíc s priamkou p_2? Iterujte.