Úloha 1

1. Nech G je jednoduchý, súvislý, graf na 22 hranách, pričom všetky vrcholy majú stupeň d. Koľko vrcholov môže graf G mať?

2. Nech G je jednoduchý graf na 9 vrcholoch a nech súčet stupňov jeho vrcholov je aspoň 27. Musí mať G vrchol, ktorého stupeň je aspoň štyri?

3. Nech G je jednoduchý graf na 10-tich vrcholoch a 28 hranách. Ukážte, že G obsahuje kružnicu na štyroch vrcholoch.

4. Pre celé číslo $n \geq 2$ definujeme graf G, ktorého vrcholmi sú usporiadané n-tice 0 a 1, pričom dva vrcholy sú spojené hranou práve vtedy keď sa líšia v presne dvoch súradniciach(Inak povedané, vrcholy sú prvky poľa $\mathbb{Z}_2^n$). Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich tvrdení je platné a svoje rozhodnutie odôvodnite.

   a) G má jednu komponentu súvislosti.
   b) G má dve komponenty súvislosti.
   b) G má viac ako dve komponenty súvislosti.

5. Karteziánskym súčinom grafov $G_1 = (V_1, E_1)$ a $G_2 = (V_2, E_2)$ rozumieme graf, ktorého vrcholmi sú prvky karteziánskeho súčinu $V_1 \times V_2$ (predpokladáme, že množiny vrcholov sú disjunktné) a dva vrcholy (a, b), (c, d) sú spojené hranou práve vtedy keď $\{a, c\} \in E_1$ a $b = d$, alebo $\{b, d\} \in E_2$ a $a = c$. Ukážte, že karteziánsky súčin grafov G_1, G_2 je súvislý práve vtedy obidva grafy sú súvislé. Ako by to dopadlo keď "súvislý" nahradíme s "hamiltonovský"? A ako keď "súvislý" nahradíme s "eulerovský"?

6. Nech G je graf s aspoň jednou hranou. Na každú hranu grafu G nakreslime malý červený krúžok a považujme tieto červené krúžky za vrcholy grafu $L(G)$. Dva červené krúžky spojíme v $L(G)$ hranou práve vtedy keď v grafe G príslušné hrany na ktorých tieto krúžky ležali mali spoločný vrchol. Takto získaný graf $L(G)$ nazveme hranovým grafom grafu G. Napríklad, hranový graf kružnice je opäť kružnica tej istej dĺžky, hranový graf cesty na 4 vrcholoch je cesta na 3 vrcholoch.

   a) Ukážte, že ak G je neprázdny eulerovský graf, tak hranový graf $L(G)$ je tiež eulerovský.
   b) Keď vieme, že hranový graf nejakého grafu G je eulerovský, plynie z toho, že Gje eulerovský?

7. Predpokladajme, že graf G a jeho komplement $\overline{G}$ sa rovnajú až na pomenovanie vrcholov, formálne: $\overline{G}$ a $\overline{G}$ sú izomorfné grafy. Zrejme kompletný graf K_1, a podľa riešenia príkladu 7.2.3 vieme, že cesta P_4 na štyroch vrcholoch a kružnica C_5 na piatich vrcholoch sú príkladmi takého grafu.Dokážte: Graf izomorfný so svojím komplementom má $4k$, alebo má $4k+1$ vrcholov.

Ďalej ukážte, že pre každé $n = 4k$, aj $n = 4k + 1$, $k \geq 1$ sa nájde graf, ktorý je izomorfný so svojím komplementom. Hint: pomocou P_4 a C_5 zostrojte požadovaný graf na ôsmich a na deviatich vrcholoch. Konštrukciu zovšeobecnite.

8. Uvažujme turnaj n hráčov, v ktorom každý hráč hrá s každým iným hráčom a žiadna dvojica neremizuje (povedzme turnaj v tenise). Turnaj reprezentujme orientovaným grafom T_n, ktorého vrcholy odpovedajú hráčom a z vrchola u ide šíp do vrchola v práve vtedy, keď hráč u vyhral nad hráčom v. Ukážte, že turnaj T_n má cestu dĺžky $n - 1$ (v turnaji cestujeme len v smere šípov).

9. Uvažujme turnaj n hráčov, v ktorom každý hráč odohral hru s každým iným hráčom a žiadna dvojica neremizovala (povedzme turnaj v tenise). Keď sa turnaj skončí, každý hráč si napíše na zoznam mená hráčov ktorých porazil a tiež meno každého takého hráča, ktorý bol porazený nejakým hráčom ktorého on porazil (napríklad, ak A porazi B a B porazil C, tak A napíše na svoj zoznam hráča C). Overte platnosť tvrdenia pre $n = 2, 3$, tak sa presvedčíte že rozumiete zadaniu. Ukážte, že sa nájde hráč, ktorý má na zozname mená všetkých ostatných hráčov. Hint: postupujte indukciou podľa n. V indukčnom kroku uvažujte hráča ktorý má najmenej výhier a vylúčte ho z turnaja. Tak dostanete turnaj na n vrcholoch a môžete aplikovať indukčný predpoklad. Môžete skúsiť riešnie aj bez indukcie: uvážte hráča, ktorý má najviac víťazstiev(takých hráčov môže byť viac, tak zvoľte jedného z nich).

10. Nech G je jednoduchý graf, pričom každý jeho vrchol má stupeň rovný 4. Ukážte, že je možné jeho hrany zafarbiť modrou a červenou farbou tak, že každý vrchol bude koncom dvoch červených a dvoch modrých hrán. Hint: uvažujte o eulerovskom ťahu v tomto grafe.

11. Kocka Q_n dimenzie n je graf, ktorého vrcholmi sú usporiadané n-tice 0 a 1, pričom dva vrcholy sú spojené hranou práve vtedy keď sa líšia v jedinej súradnici.

    a) Určte všetky n pre ktoré má Q_n uzavretý, respektíve otvorený Eulerovský ťah.

    b) Určte všetky n pre ktoré má Q_n Hamiltonovskú kružnicu. Hint: ukážte, že Q_n možno zostrojiť pomocou dvoch kópií kocky Q_{n-1}, $n \geq 3$. Potom existenciu prechádzky možno dokázať mat. indukciou podľa n, teda hamiltonovské kružnice v oboch kópiách rozšírime na hamiltonovskú kružnicu v Q_n, akým spôsobom sa to dá urobiť asi najlepšie vidno pri prechode od Q_2 ku Q_3.

12. Myška Micka sa pustila do tunelovania $3 \times 3 \times 3$ kocky syra, ktorá pozostáva z 27-mych $1 \times 1 \times 1$ kociek. Ako prvú zjedla kocku v rohu, potom sa pustila do susednej kocky a celú ju zjedla, opäť načla a zjedla s ňou susednú kocku

atď až zjedla celú veľkú kocku syra. Mohla Micka skončiť v strede kocky?
Pre upresnenie: dve kocky sú susedné keď majú spoločnú stenu.