TEÓRIA GRAFOV

Prednášajúci: RNDr. Jana Tomanová, CSc.

Katedra algebry a geometrie
FMFI UK
e-mail: jana.tomanova@fmph.uniba.sk

- Ako budeme pracovať: sylaby, spôsob hodnotenia.

Na stránke oddelenia algebry a teórie čísel

thales.doa.fmph.uniba.sk

kliknite na Jana Tomanová, elektronické materiály, priečinok

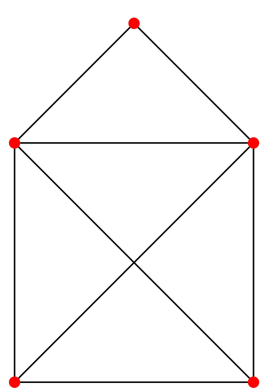
Teória grafov 3mms

Tam nájdete sylaby a v rámci nich spôsob hodnotenia, zoznam odporučenej literatúry. Postupne počas semestra budú pribúdať podklady ku vybraným prednáškam, a podklady ku úlohám na samostatné/tímové riešenie.

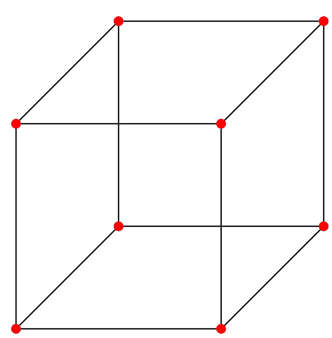
- čomu sa budeme venovať: klasické úlohy teórie grafov. Sú to úlohy, ktoré otvorili priestor pre samostatný smer výskumu a sú stále aktuálne. Pozrieme sa na ich riešenia, varianty, aplikácie, vzájomné prepojenie. Volne nadviažeme na známe, najmä pojmy a tvrdenia, z prednášky TG v druhom ročníku.

Dve puzzle, dve témy TG

Dá sa domček nakresliť *jedným ťahom*? Nájde sa *okružná prechádzka* po vrcholoch a hranách kocky?



Domček

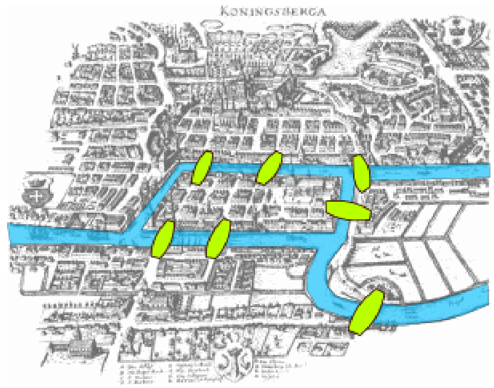


Kocka

- Ktoré obrázky je možné nakresliť jedným uzavretým/otvoreným *ťahom*? Na ktorých obrázkoch sa dá vyznačiť *okružná* prechádzka?

Sedem mostov Kráľovca

Leonard Euler
(1707 - 1783)



Kráľovec v 18 st.

Problém Je možné prejsť sa Kráľovcom tak, aby sme každým mostom prešli presne raz a prechádzku skončili na mieste kde sme ju začali?

- *Graf* G je usporiadaná dvojica (V, E), kde $V \neq \emptyset$ je konečná množina a $E \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V\}$. Prvky množiny V nazývame *vrcholy* grafu G, prvky množiny E nazývame *hrany* grafu G.
- *sled* v grafe G z vrchola u do vrchola v je striedavú postupnosť

$$u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k = v, \quad \text{kde } e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \quad \text{pre } i = 1, \dots, k$$

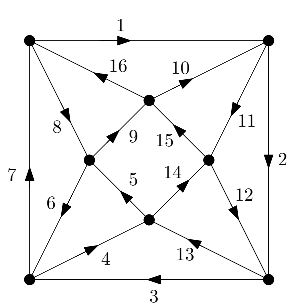
vrcholov a hrán grafu G Ak počiatočný a koncový vrchol prechádzky sú totožné, hovoríme že prechádzka je *uzavretá*.

- *ťah* v grafe G je sled, v ktorom sa každá hrana G vyskytuje najviac raz.
- *cesta* v grafe G je ťah, v ktorom sa každý vrchol G vyskytuje najviac raz.

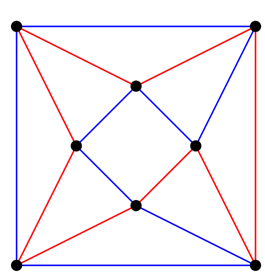
Problém: Popíšte grafy ktoré obsahujú uzavretý/ otvorený ťah cez všetky hrany. Taký ťah nazývame uzavretý/ otvorený *eulerovský ťah.*

Veta.(L. Euler)*Súvislý graf obsahuje uzavretý eulerovský ťah práve vtedy, keď má všetky vrcholy párneho stupňa.*

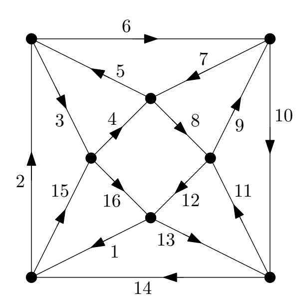
Hypotéza.(L. Sabidusi) Nech G je eulerovský graf, stupeň každého jeho vrchola je aspoň 4 a nech W je uzavretý eulerovský ťtah v G. Potom existuje taký rozklad hrán G na kružnice, že žiadna kružnica neobsahuje dve po sebe idúce hrany, ktoré by



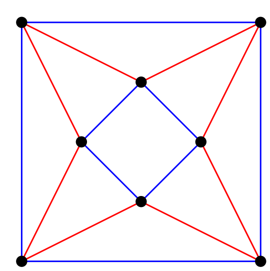
Ťah W_1



Rozklad R_1



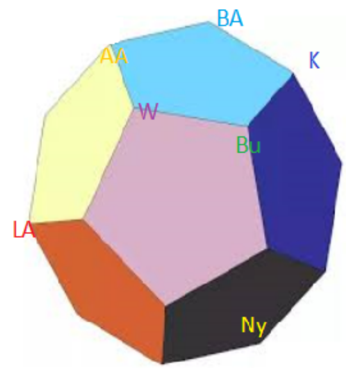
Ťah W_2



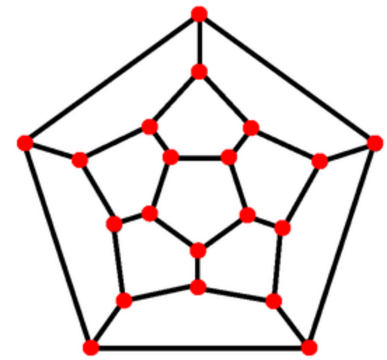
Rozklad R_2

Cesta okolo sveta

Wiliam Rowan Hamilton
(1805 - 1865)



Cesta okolo sveta



Problém Je možná taká prechádzka cez vybrané metropoly, ktorá každé mesto navštíviť presne raz askončí v meste v ktorom začala?

• *Hamiltonovská kružnica* v grafe G je kružnica, ktorá obsahuje všetky vrcholy G. Graf, ktorý obsahuje hamiltonovskú kružnicu nazývame *hamiltonovský*.

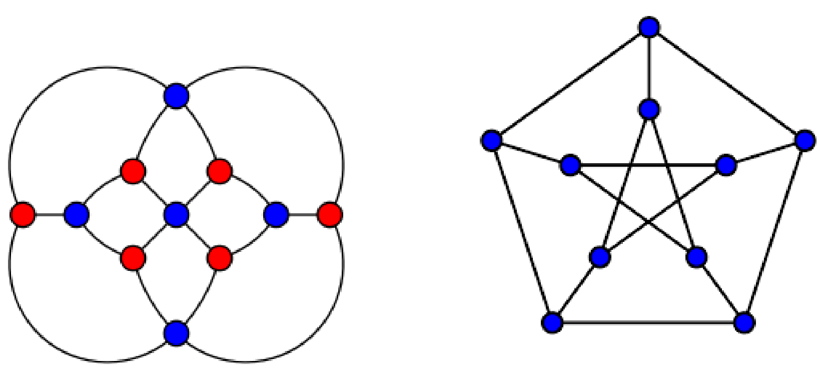
Problém. Pre daný graf G rozhodnite, či obsahuje hamiltonovskú kružnicu.

• Pre konkrétny graf, resp. triedu grafov môže byť riešenie ľahké, vo všeobecnosti však ide o jeden z najťažších problémov v diskrétnej matematike. Výskum sa preto sústreďuje na určenie nutných/postačujúcich podmienok pre existenciu hamiltonovskej kružnice v grafe. Tomu sa budeme venovať v prvej sérii prednášok.

• Niekoľko úloh k našej diskusii:

1. Navrhnite rozvrh bilaterálnych rokovaní piatich senátorov A, B, C, D, E, ktorý vyhovuje takémuto zadaniu: jeden z účastníkov každého rokovania (okrem posledného rokovania) sa zúčastní na nasledujúcom rokovanía a nikto sa nezúčastní troch po sebe idúcich rokovaní. Rokovať zamýšľa senátor A so senátormi B, C, E; senátor B so senátormi A, C, D, E; senátor C so senátormi A, B, D, E; D potrebuje rokovať senátormi B, C a senátor E so senátormi A, B, C. Riešenie znázornite graficky.

2. Navrhnite okružnú prechádzku mestom, alebo vysvetlite prečo taká prechádzka nie je možná.



Obr. 1: mesto Herschel, a mesto Petersen (prevzaté z WIKI)

3. A mouse eats his way through a $3 \times 3 \times 3$ cube of cheese by tunnelling through all the 27 $1 \times 1 \times 1$ subcubes. If he starts in one corner and always moves on an uneaten subcube, can he finish at the center of the cube?(Bondy, Murty: Graph thheory with applications)

4. Máme štandardnú sadu 52 kariet, t.j. každá karta má jednu z hodnôt $A = 1$, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, $J = 11$, $Q = 12$, $K = 13$ a niektorú zo štyroch farieb $\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit$. Predpokladajme, že niekto rozdelil karty do 13 kôpok po 4 karty. Ukážte, že je možné zobrať z každej kôpky jednu kartu tak, že hodnoty sa nebudú opakovať.