Úloha prechádzky v grafe

Na cvičení budú, tak ako sme sa dohodli, tímy prezentovať riešenia nasledujúcich úloh. Úlohy si prosím rozdelte tak, aby každý tím riešil aspoň dve, aby žiadne dve sady zvolených úloh neboli totožné a aby bola každá úloha riešená aspoň jedným tímom.

1. Nech G je graf s aspoň jednou hranou. Na každú hranu grafu G nakreslime malý červený krúžok a považujme tieto červené krúžky za vrcholy grafu $L(G)$. Dva červené krúžky spojíme v $L(G)$ hranou práve vtedy keď v grafe G príslušné hrany na ktorých tieto krúžky ležali mali spoločný vrchol. Takto získaný graf $L(G)$ nazveme hranovým grafom grafu G. Napríklad, hranový graf kružnice je opäť kružnica tej istej dĺžky, hranový graf cesty na 4 vrcholoch je cesta na 3 vrcholoch.

   a) Ukážte, že ak G je eulerovský graf, tak hranový graf $L(G)$ je tiež eulerovský. Ako by to dopadlo pre hamiltonovský graf G ?

   b) Predpokladajme, že hranový graf grafu G je eulerovský. Plynie z toho, že G je eulerovský? Ako by to dopadlo keď G je hamiltonovský?

2. Karteziánskym súčinom grafov $G_1 = (V_1, E_1)$ a $G_2 = (V_2, E_2)$ rozumieme graf, ktorého vrcholmi sú prvky karteziánskeho súčinu $V_1 \times V_2$ (predpokladáme, že množiny vrcholov sú disjunktné) a dva vrcholy (a, b), (c, d) sú spojené hranou práve vtedy keď $\{a, c\} \in E_1$ a $b = d$, alebo $\{b, d\} \in E_2$ a $a = c$. Ukážte, že karteziánsky súčin hamiltonovských grafov je hamiltonovský. Pomôcka: stačí ukázať, že súčin dvoch kružníc je hamiltonovský graf.

3. Ukážte, že existuje nekonečne veľa nehamiltonovských grafov, ktoré spĺňajú nutnú podmienku pre existenciu hamiltonovske kružnice: pre každú neprázdnu množinu $S \subset V$ počet komponentov grafu $G \setminus S$ neprevyšuje $|S|$.

4. Vieme, že Petersenov graf nie je hamiltonovský. Ukážte, že vyhovuje nutnej podmienke v úlohe 3.

5. Ukážte, že v grafe G na n vrcholoch a minimálnym stupňom $\delta > n/2$ sú ľubovoľné dva vrcholy spojené hamiltonovskou cestou.

6. Graf ktorý vyhovuje predpokladom Oreho vety, splňuje podmienku Chvátalovej vety. Dokážte.

7. Graf G na $n \geq 3$ vrcholoch a $e(G) > \binom{n-1}{2} + 1$ hranách obsahuje hamiltonovskú kružnicu. Naviac, existuje jediný nehamiltonovský graf, až na izomorfizmus, s $\binom{n-1}{2} + 1$ hranami, konkrétne $G(1, 1, n)$ a pre $n = 5$ graf $G(2, 2, 5)$. Dokážte. Pomôcka: môžete konzultovať Corollary 4.6, kapiola Euler Tours and Hamilton Cycles, v Bondy, Murty: Graph Theory With Applications

8. Predpokladajme, že stupeň každého vrchola grafu G je rovný d, pričom d je nepárne. Ukážte, že každá hrana grafu G leží na párnom počte hamiltonovských kružníc.

9. Úloha 12^+ učebnica R. Diestel: Tretia mocnina súvislého grafu (na aspoň troch vrcholoch) je hamiltonovský graf. Dokážte.

10. Navrhnite algoritmus pre určenie uzáveru $c(G)$ grafu G. V prípade že $c(G)$ je hamiltonovský, navrhnite efektívny algoritmus pre určenie hamiltonovskej kružnice v G. Pomôcka: na kontrolu hrán, resp. nehrán a rovnako na kontrolu stupňov vrcholov je vhodná matica susednosti. K identifikácii hamiltonovskej kružnice v G, v prípade že máme v ruke hamiltonovku v uzávere, pomôže nový parameter, ktorý odlíši pridané hrany. Môžete tiež konzultovať článok J. A. Bondy and V. Chvátal: A method in Graph Theory, Discrete Math. 15,1976,111-135, str. 117-118, je nahraný v našom priečinku.