Úlohy farbenie

Prosím rozdelte si úlohy, každý tím aspoň jednu úlohu tak, aby každá úloha bola riešená aspoň jedným tímom. Riešenia úloh budú tímy prezentovať 8.12

Niektoré z nasledujúcich príkladov poukazujú na fakt, že regulárne zafarbenie vrcholov grafu G pažravým algoritmom podstatne závisí od poradia, v akom vrcholy farbíme. Číslo nezávislosti $\alpha(G)$ grafu G je najväčší počet takých vrcholov grafu G, že žiadne dva z nich nie sú spojené hranou. Napríklad, $\alpha(K_n) = 1$, $\alpha(P_{2n+1}) = n + 1$, $\alpha(C_{2n}) = n$. Graf H je indukovaný podgraf grafu G ak množina vrcholov grafu H je podmnožinou množiny vrcholov grafu G a dva vrcholy grafu H sú spojené hranou práve vtedy ak sú spojené hranou v grafe G. Definície a ďalšie príklady ktoré ich ilustrujú, ak potrebujete, nájdete na kľúčiku v učebnici Bondy, Murty.

1. Určte chromatické číslo kocky Q_n dimenzie n. Vrcholmi Q_n sú prvky Z_2^n, dva vrcholy sú spojené hranou práve vtedy keď sa líšia v jedinej súradnici.
   Pomôcka: ukážte, že Q_n je bipartitný graf.

2. Pre každý graf G existuje také poradie vrcholov, že pažravý algoritmus použije $\chi(G)$ farieb. Dokážte. Pre každé n celé nezáporné číslo, existuje graf G_n taký, že pažravý algoritmus použije aspoň $\frac{n}{2}\chi(G_n)$ farieb. Dokážte.

3. Ukážte, že pre každé k existuje strom T_k s maximálnym stupňom k taký, že postupné zafarbenie použije $k + 1$ farieb.
   Pomôcka: induktívne zostrojte postupnosť $T_0, T_1, \ldots, T_k, \ldots$ stromov, kde strom T_k vznikne z T_{k-1} vhodným pridaním listov. Využite poradie vrcholov v akom sa aplikoval pažravý algoritmus na zafarbenie stromu T_{k-1}.

4. Nech G je graf, ktorý neobsahuje ako indukovaný podgraf cestu na štyroch vrcholoch. Ukážte, že každá aplikácia postupného zafarbenia dáva optimálne zafarbenie grafu G.

5. Pripomeňme: Karteziánsky súčin $G\Box H$ grafov G a H je graf, ktorého množina vrcholov pozostáva zo všetkých dvojíc (u, v), kde u je vrchol grafu G a v je vrchol grafu H. Dva vrcholy (u, v) a (u', v') sú spojené hranou práve vtedy, keď $u = u'$ a $(v, v') \in EH$, alebo $v = v'$ a $(u, u') \in EG$. Napríklad, kocka dimenzie $n + 1$ je karteziánskym súčinom kompletného grafu K_2 a kocky dimenzie n.

   a) Ukážte, že $\chi'(C_n \Box K_2) = 3$.

   b) Ukážte, že $\chi'(G \Box K_2) = \Delta(G \Box K_2)$.

   c) Predpokladajme, že G a H sú jednoduché grafy s aspoň jednou hranou. Pomocou Vizingovej vety ukážte, že ak $\chi'(H) = \Delta(H)$, tak $\chi'(G \Box H) = \Delta(G \Box H)$.

6. Nech G je regulárny graf s artikuláciou. Ukážte, že $\chi'(G) > \Delta(G)$.

7. (Farbenie trochu inak.) Je dané prvočíslo $p > 2$ a prirodzené číslo n. Koľkými spôsobmi je možné zafarbiť vrcholy kružnice na p vrcholoch n farbami? Spôsoby pri ktorých sa po otočení kružnice farby vrcholov zhodujú nepovažujeme za rôzne. nNaviac, zafarbenie nemusí použiť všetky farby a pripúšťame, aby susedné vrcholy boli zafarbené tou istou farbou.