Úloha, pravdepodobnostné dôkazy

Turnaj $n$ hráčov, v ktorom každý hráč odohral zápas s každým iným hráčom, napr. turnej v tenise (remíza nie je povolená) je orientovaný graf $T$ s vrcholmi $\{1, \ldots, n\}$, pričom z $i$ vychádza šíp do $j$, označujeme $(i, j)$, práve vtedy ak vo vzájomnom zápase hráč $i$ vyhral nad $j$.
Povieme, že turnaj $T$ je *tranzitívny*, ak $(i, j), (j, k) \in T$ implikuje $(i, k) \in T$. Ekvivalentne, keď existuje permutácia $\sigma$ hráčov taká, že $(i, j) \in T$ práve vtedy keď $\sigma(i) < \sigma(j)$.

1. Nech $v(n)$ je najväčšie celé číslo také, že každý turnaj na $V = \{1, \ldots, n\}$ obsahuje tranzitívny podturnaj s $v(n)$ hráčmi.
Dokážte: $v(n) \leq 1 + [2 \log_2 n]$.

Ak jednotliví hráči majú veľké výkonnostné rozdiely môžeme očakávať, že turnaj presvedčivo určí poradie hráčov, t.j. najlepší z nich vyhrá nad všetkými, druhý najlepší vyhrá so všetkými okrem prvého, atď. Turnaj s vyrovnanými hráčmi môže dopadnúť zložitejším spôsobom.
Povieme, že turnaj má *vlastnosť* $S_k$, ak sa pre každých $k$ hráčov nájde nejaký iný hráč, ktorý ich všetkých porazil. Zostrojte turnaj na 7 vrcholoch s vlastnosťou $S_2$. (pomôcka: vrcholy odpovedajú prvkom poľa $\mathbb{Z}_7$, orientáciu šípov zvolte tak, aby turnaj mal symetriu rádu 7.) Ukážte, že pre každé $k$ existuje turnaj s vlastnosťou $S_k$.

3. Nezávislé množiny a kliky.

Množina $M$ vrcholov grafu $G$ je nezávislá, ak žiadne dva vrcholy z $M$ nie sú susedné v $G$. Veľkosť najväčšej nezávislej množiny v grafe $G$ označujeme $\alpha(G)$ a nazývame číslo nezávislosti grafu $G$. Klikou v grafe $G$ rozumieme kompletný podgraf grafu $G$.

a) Ukážte, že pre každý graf $G = (V, E)$ platí

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{deg(v) + 1}.$$

( $deg(v)$ označuje stupeň vrchola $v$.)
Pomôcka: Predpokladajme, že $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ a zvoľme náhodnú permutáciu $\pi$ týchto vrcholov. Uvažujme množinu $M \subseteq V$, ktorá obsahuje všetky také vrcholy $v$ , že pre všetkých susedov $u$ vrchola $v$ platí $\pi(u) > \pi(v)$, t.j. vrchol $v$ je v usporiadaní podľa hodnôt $\pi$ menší než všetci jeho susedia.
Ukážte, že $M$ je nezávislá v $G$. Odtiaľ máme $|M| \leq \alpha(G)$ pre ľubovoľnú

permutáciu $\pi$ a teda stredná hodnota $E(|M|) \leq \alpha(G)$.
Spočítajte teraz túto strednú hodnotu cez indikátor javu $A_v$: $v$ patrí do $M$.

b) Ako dôsledok predchádzajúceho odvoďte:
Pre každý graf $G$ na $n$ vrcholoch a $m$ hranách platí

$$\alpha(G) \geq \frac{n^2}{2m+n} .$$

Hint: Presvedčte sa o platnosti nasledujúceho:
Nech $x_1, \ldots, x_k$ sú kladné celé čísla. Platí

$$\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_k} \geq \frac{k^2}{x_1 + \cdots + x_k}$$

a položte $x_v = deg(v) + 1$.

c) Ako dôsledok predchádzajúceho odvoďte:
Ak $G$ nemá kliku na $k$ vrcholoch, tak

$$m \leq \frac{(k-2)n^2}{2(k-1)} .$$

(Teda ako dôsledok dostaneme slabú formu Turánovej vety.)