

Úloha 1, Systémy rozličných reprezentantov

1. Predpokladajme, že množinový systém $A_1, \dots, A_n \subseteq X$ splňuje Hallovu podmienku. Pokiaľ je každá A_i jednoprvková, (H) zaručuje, že množiny A_i sú navzájom disjunktné a tak existuje SRR. Predpokladajme, že aspoň jedna z množín, povedzme A_1 , má viac než jeden prvok. Ukážte, že v A_1 sa nájde taký prvok a^* že jeho vynechanie neporuší Hallovu podmienku, t.j. systém $A_1 \setminus \{a^*\}, A_2, \dots, A_n$ vyhovuje tejto podmienke. (Takto, po konečnom počte aplikácií vynechania prvku prideme ku jednoprvkovým množinám, ktoré sú navzájom disjunktné. Preto tento nový systém má SRR, ktorý je aj SRR pre pôvodný systém a dostali sme iný dôkaz Hallovej vety než na prednáške.) Hint: postupujte nepriamo, t.j. nech $A_1 = \{x, y, \dots\}$ a nech $A_1 \setminus \{x\}, A_2, \dots, A_n$ a aj $A_1 \setminus \{y\}, A_2, \dots, A_n$ nespĺňajú Hallovu podmienku.
2. Dokážte nasledujúce zovšeobecnenie Hallovej vety.
Uvažujme množinový systém $A_1, \dots, A_n \subseteq X$ a nech $M \subseteq X$. Potom A_1, \dots, A_n má SRR ktorý obsahuje M ako podmnožinu práve vtedy keď platia podmienky
 1. $|\cup_{i \in I} A_i| \geq |I|$, pre každú $I \subseteq \{1, \dots, n\}$,
 2. $|(\cup_{i \in I} A_i) \cap M| \geq |I| + |M| - n$, pre každú $I \subseteq \{1, \dots, n\}$.Naviac, podmienka 1. je ekvivalentná s podmienkou 1'. A_1, \dots, A_n má SRR. Podmienka 2. je ekvivalentná s podmienkou 2'. M je čiastočný SRR pre A_1, \dots, A_n .
Hint: Ekvivalentnosť podmienok je zrejmá. Uvažujte systém $A_1, \dots, A_n, X \setminus M, \dots, X \setminus M$, kde máme $|X| - n$ kópií množiny $X \setminus M$. Ukážte, že pôvodný systém má SRR s požadovanou vlastnosťou práve vtedy keď nový systém má SRR. Potom Aplikujte Hallovu vetu (na nový systém).
3. Dokážte nasledujúce tvrdenie z Proofs from The Book (časť Three famous theorems on finite sets): Predpokladajme, že každá z množín A_1, \dots, A_n má $k \geq 1$ prvkov, a nech žiadny prvok nie je vo viac ako k množinách. Potom existuje takých k systémov rozličných reprezentantov, že pre každé i , reprezentanti množiny A_i dávajú množinu A_i .