Úloha 1, Systémy rozličných reprezentantov

1. (2012 Putnam Exam Problem B3) A round-robin tournament of $2n$ teams lasted for $2n-1$ days, as follows. On each day, every team played one game against another team, with one team winning and one team losing in each of the n games. Over the course of the tournament, each team played every other team exactly once. Can one necessarily choose one winning team from each day without choosing any team more than once?

2. Kúzelník a jeho pomocník predvádzajú takéto kúzlo s kartami: kúzelník vyjde z miestnosti. Pomocník vyzve jedného z divákov aby zamiešal karty a vyložil ich na stôl (do radu zľava doprava), lícom na spod a iného diváka vyzve aby vybral 5 kariet. Teraz pomocník jednu z nich ukáže publiku, schová ju do vrecka a zvyšné štyri karty vyloží na stôl (opäť zľava doprava, v nejakom poradí) lícom nahor. Kúzelník vojde do miestnosti a uhádne chýbajúcu kartu. Aká dohoda kúzelníka a pomocníka toto kúzlo umožňuje?
   Ukážte, že Hallova veta takúto dohodu, aspoň v princípe, umožnuje. Potom skúste nájsť riešenie bez použitia Hallovej vety.
   Hodnory kariet sú: $A, 2, 3, \ldots, , 10, J, Q, K$ pričom z každej hodnoty máme štyri typy: $\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit$ a $\spadesuit$.

3. Nech G je je konečná grupa a H je jej podgrupa indexu n (t.j. $n =$ počet tried rozkladu G podľa H). Ukážte, že v G existujú prvky $g_1, \ldots, g_n$ tak, že presne jedno g_i je v ľavej triede podľa H a presne jedno v pravej (t.j. ľavé a pravé triedy majú tú istú množinu reprezentantov).

4. Dokážte nasledujúce tvrdenie z Proofs from The Book (časť Three famous theorems on finite sets): Predpokladajme, že každá z množín $A_1, \ldots, A_n$ má $k \geq 1$ prvkov, a nech žiadny prvok nie je vo viac ako k množinách. Potom existuje takých k systémov rozličných reprezentantov, že pre každé i, reprezentanti množiny A_i dávajú množinu A_i.

5. Predpokladajme, že množinový systém $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$ splňuje Hallovu podmienku. Pokiaľ je každá A_i jednoprvková, (H) zaručuje, že množiny A_i sú navzájom disjunktné a tak existuje SRR. Predpokladajme, že aspoň jedna z množín, povedzme A_1, má viac než jeden prvok. Ukážte, že v A_1 sa nájde taký prvok $a^\star$ že jeho vynechanie neporuší Hallovu podmienku, t.j. systém $A_1 \setminus \{a^\star\}, A_2, \ldots, A_n$ vyhovuje tejto podmienke. (Takto, po konečnom počte aplikácií vynechania prvku prídeme ku jednoprvkovým množinám, ktoré sú navzájom disjunktné. Preto tento nový systém má SRR, ktorý je aj SRR pre pôvodný systém a dostali sme iný dôkaz Hallovej vety než na prednáške.)

6. Dokážte nasledujúce zovšeobecnenie Hallovej vety.(Neskôr využijeme pri charakterizácii skóre turnaja.)
   Uvažujme množinový systém $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$ a celé nezáporné čísla $p_1, \ldots, p_n$. Ukážte, že existujú navzájom disjunktné množiny $X_1, \ldots, X_n$ také že $X_i \subseteq A_i$ a $|X_i| = p_i$ pre všetky i práve vtedy keď pre ľubovoľnú množinu indexov $i_1, \ldots, i_k$ platí $|A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_k}| \geq p_{i_1} + \cdots + p_{i_k}$, $k = 1, \ldots, n$.
   Všimnime si, že pre $p_1 = \cdots = p_n = 1$ dostávame Hallovu vetu.

7. Nech $G = (X \cup Y, E)$ je bipartitný graf ktorý má má X-nasýtené párovanie.

i) Ukážte, že sa nájde taký vrchol $x \in X$, že pre každú hranu xy existuje X-nasýtené párovanie v G, ktoré túto hranu obsahuje.

ii) Ukážte, že ak každý vrchol v X má stupeň d, tak počet X-nasýtených párovaní v G je aspoň $d!$ ak $d \leq m$, a aspoň $d(d-1)\ldots(d-m+1)$ ak $d > m$.(Veľkosť partie X je m.)

8. Nech $G = (X \cup Y, E)$ je bipartitný graf a Δ je maximálny stupeň vrchola v G. Označme A množinu vrcholov stupňa Δ. Ukážte, že G má $(A \cap X)$ - nasýtené párovanie. Potom odvoďte, že každý bipartitný graf má párovanie, ktoré pokrýva všetky vrcholy stupňa Δ a teda každý $d \geq 1$ regulárny bipartitný graf má úplné párovanie.

9. Riešte problém 5D z van Lint.

10. Riešte problém 5F z van Lint.