Úloha 2

1. Nech $G = (A \cup B, E)$ je bipartitný graf, ktorý má A-nasýtené párovanie.

   i) Ukážte, že sa nájde taký vrchol $a \in A$, že pre každú hranu ab existuje párovanie v G, ktoré túto hranu obsahuje.

   ii) Ukážte, že ak každý vrchol v A má stupeň d, tak počet A-nasýtených párovaní v G je aspoň $d!$ ak $d \leq m$, a aspoň $d(d-1)\dots(d-m+1)$ ak $d > m$.(Veľkosť A je m.)

2. Dvaja hráči hrajú takúto hru na grafe G: striedavo volia vrcholy $v_0, v_1, v_2, \dots$ vždy tak, že $v_i v_{i+1}$ je hrana v G. Vyhráva hráč, ktorý ako posledný môže zvoliť vrchol. Ukážte, že prvý hráč má vyhrávajúcu stratégiu práve vtedy keď G nemá úplné párovanie.

3. Nech G je graf na $2n$ vrcholoch, s minimálnym stupňom n. Ukážte, že G má úplné párovanie (t.j. párovanie, ktoré pokrýva každý vrchol G). Hint: Asi najjednoduchšie je predpokladať, že G nemá úplné párovanie a uvažovať najpočetnejšie párovanie M. Najskôr si uvedomme, že musia existovať dva voľné vrcholy v, w. Ďlej, hrany idúce z týchto vrcholov majú druhý koniec pokrytý párovaním M.Teraz si všimnime, že pre ľubovoľnú hranu $xy \in M$ idú nanajvýš dve hrany z množiny $\{v, w\}$ do $\{x, y\}$. Vysvetlite, prečo toto vedie k sporu s voľbou M.