1. Dvaja hráči hrajú takúto hru na grafe G: striedavo volia vrcholy $v_0, v_1, v_2, \ldots$ vždy tak, že $v_i v_{i+1}$ je hrana v G. Vyhráva hráč, ktorý ako posledný môže zvoliť vrchol. Ukážte, že prvý hráč má vyhrávajúcu stratégiu práve vtedy keď G nemá úplné párovanie.

2. Nech G je graf na $2n$ vrcholoch, s minimálnym stupňom n. Podľa Diracovej vety G má hamiltonovskú kružnicu a teda má úplné párovanie (t.j. párovanie, ktoré pokrýva každý vrchol G). Uvedený fakt, t.j. existenciu úplného párovania, odvoďte bez odvolania sa na hamiltonovskú kružnicu.

3. Predpokladajme, že vrcholy grafu G sú vybavené preferenciami. Povieme, že kružnica je *preferenčne orientovaná*, ak sa dá písať v tvare $aAbB \ldots zZ$, kde A preferuje b pred a, b preferuje B pred $A, \ldots$, a Z preferuje a pred z.
   Dokážte nasledujúce tvrdenie: Predpokladajme, že M a M' sú dve stabilné párovania v grafe G s preferenciami a C je komponenta súvislosti podgrafu indukovaného $M \cup M'$. Ak C má aspoň tri vrcholy, tak C je preferenčne orientovaná kružnica. Špeciálne, ak $aA, bB \in M$ a $aB \in M'$, tak a preferuje A pred B práve vtedy keď B preferuje a pred b.

4. Pomocou predchádzajúceho dokážte: Pre každé priradenie preferencií v G existujú množiny $U_1 \subseteq X$ a $U_2 \subseteq Y$ také, že každé stabilné párovanie v G je U_1-nasýtené v podgrafe indukovanom $U_1 \cup U_2$. Špeciálne, všetky stabilné párovania majú rovnakú veľkosť.

5. Zostrojte bipartitný graf G s preferenciami v ktorom stabilné párovanie v podgrafe indukovanom $U_1 \cup U_2$ nie je stabilné v G.

6. Nech G je bipartitný graf s preferenciami. Povieme, že stabilné párovanie M je X-optimálne, ak pre každé stabilné párovanie M' a každý vrchol $a \in X$, ak $aB \in M'$ tak $aA \in M$ pre nejaké $A \in Y$, a buď $A = B$ alebo inak a preferuje A pred B. Krátko, stabilné párovanie M je X-optimálne, ak každý vrchol z X je v M aspoň tak spokojný ako v ľubovoľnom inom stabilnom párovaní.
   Dokážte nasledujúce: Pre každé priradenie preferencií v grafe G existuje X-optimálne párovanie.