Úlohy - farbenie, pažravý algoritmus

Niektoré z nasledujúcich príkladov poukazujú na fakt, že regulárne zafarbenie vrcholov grafu G pažravým algoritmom podstatne závisí od poradia, v akom vrcholy farbíme. Pripomeňme, že pri pažravom farbení vrcholov grafu G farbami 1, 2, … postupne po jednom farbíme vrcholy, čim definujeme ich poradie $v_1, v_2, \ldots$ a to takým spôsobom, že vrchol v_i zafarbíme najmenšou farbou, ktorá nebola použitá na jeho susedoch.

1. Zostrojte graf G ktorý nie je kompletný, ani kružnica, a pažravý algoritmus použije $\chi(G)+1$ farieb.

2. Ukážte, že pre každé k existuje strom T_k s maximálnym stupňom k taký, že pažravý algoritmus použije $k+1$ farieb. Hint: induktívne zostrojte postupnosť $T_0, T_1, \ldots, T_k, \ldots$ stromov, kde strom T_k vznikne z T_{k-1} vhodným pridaním listov. Využite poradie vrcholov v akom sa aplikoval pažravý algoritmus na zafarbenie stromu T_{k-1}.

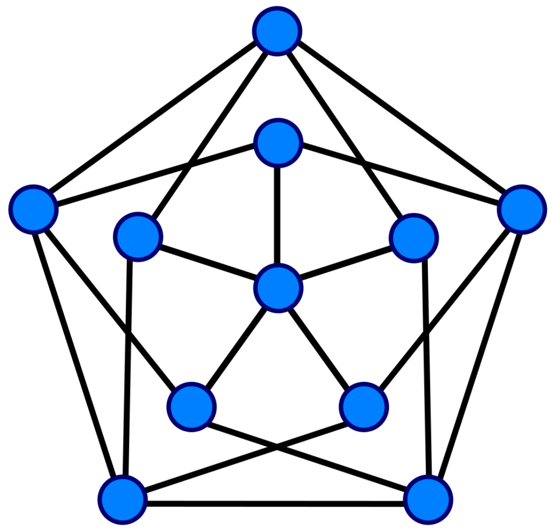
3. Ukážte, že pre každé n existuje taký bipartitný graf na $2n$ vrcholoch, že pažravý algoritmus použije n farieb.

4. Pre každý graf G existuje také poradie vrcholov, že pažravý algoritmus použije $\chi(G)$ farieb. Dokážte.

5. Pre každý graf G platí nerovnosť
   $\chi(G) \leq 1 + \max\{\delta(H) : H \text{ je indukovaný podgraf grafu G}\}$,
   kde $\delta(H)$ označuje minimálny stupeň vrchola grafu H. Dokážte. Popíšte všetky grafy G pre ktoré platí rovnosť
   $\max\{\delta(H) : H \text{ je indukovaný podgraf grafu G}\} = \Delta(G)$.

6. Induktívne definujme postupnosť $G_0, G_1, \ldots, G_k, G_{k+1} \ldots$ grafov: $G_0 = K_2$, keď je G_k už definované, tak zostrojíme G_{k+1} takto: $V(G_{k+1}) = V(G_k) \cup V' = \{v' : v \in V(G_k)\} \cup \{w\}$ a

   $E(G_{k+1}) = E(G_k) \cup \{uv' : uv \in E(G_k)\} \cup \{v'w : v' \in V'\}$. Napríklad, G_2 je kružnica C_5, G_3 máme na obrázku dole.



Obr. Grötzschov graf, prevzaté z WIKI

Presvedčte sa, že žiadny z grafov neobsahuje trojuholník. Ďalej, zrejme na zafarbenie grafu G_{k+1} stačí $k+1$ farieb (keď už vieme, že $\chi(G_k) = k$). Ukážte, že G_{k+1} nie je možné zafarbiť k farbami. Tým bude ukázané, že existujú grafy bez trojuholníkov, s ľubovoľne veľkým chromatickým číslom.