Úlohy - hamiltonovky

1. Ukážte, že existuje nekonečne veľa nehamiltonovských grafov, ktoré spĺňajú nutnú podmienku: pre každú neprázdnu množinu $S \subset V$ počet komponentov grafu $G \setminus S$ neprevyšuje $|S|$. Ukážte, že Petersenov graf nie je hamiltonovský a splňuje uvedenú nutnú podmienku.

2. Ukážte, že uzáver grafu je dobre definovaný, t.j. keď $G_1 = G + e_1, \ldots, e_k$ aj $G_2 = G + f_1, \ldots, f_s$ je uzáverom grafu $G$, hrany sú vypísané v poradí ako sme ich pridávali, tak každá hrana $e_i$ patrí do $G_2$ a každá $f_j$ patrí do $G_1$.

3. Navrhnite algoritmus pre určenie uzáveru $c(G)$ grafu $G$. V prípade že $c(G)$ je hamiltonovský, navrhnite algoritmus pre určenie hamiltonovskej kružnice v $G$. Hint: na kontrolu hrán, resp. nehrán a rovnako na kontrolu stupňov vrcholov je vhodná matica susednosti. K identifikácii hamiltonovskej kružnice v $G$, v prípade že máme v ruke hamiltonovku v uzávere, pomôže nový parameter, ktorý odlíši pridané hrany. Môžete tiež konzultovať článok J. A. Bondy and V. Chvátal: A method in Graph Theory, Discrete Math. 15,1976,111-135.

4. Ukážte, že v grafe $G$ na $n$ vrcholoch a minimálnym stupňom $\delta > n/2$ sú ľubovoľné dva vrcholy spojené hamiltonovskou cestou. Hint: nech $u, v$ sú dva vrcholy grafu $G$. Utvorme graf $G'$ pridaním nového vrchola $w$ a a hrán $uw$ a $vw$. Stačí ukázať, že graf $G'$ má hamiltonovskú kružnicu. Uvažujte uzáver grafu $G'$.

5. Graf ktorý vyhovuje predpokladom Oreho vety, splňuje podmienku Chvátalovej vety. Dokážte. Hint: predpokladajte, že je splnená Oreho podmienka a nie Chvátalova pre nejaké $k < n/2$. Uvažujte podgraf idukovaný vrcholmi so stupňami $d_1, \ldots, d_k$ a podgraf indukovaný zvyšnými vrcholmi.

6. Graf $G$ na $n \geq 3$ vrcholoch a $e(G) > \binom{n-1}{2} + 1$ hranách obsahuje hamiltonovskú kružnicu. Naviac, existuje jediný nehamiltonovský graf, až na izomorfizmus, s $\binom{n-1}{2} + 1$ hranami, konkrétne $G(1, 1, n)$ a pre $n = 5$ graf $G(2, 2, 5)$. Dokážte. Hint: uvažujme nehamiltonovský graf $G$, podľa Chvátalovej vety, tento je dominovaný grafom $G(k, k, n)$. Odtiaľ vieme, že $e(G) \leq e(G(k, k, n))$.

7. Nech $G$ je graf s postupnosťou stupňov $S = d_1 \leq \cdots \leq d_n$. Nech platí: Ak $d_k \leq k-1 < (n-1)/2$ tak $d_{n+1-k} \geq n-k$. Potom G má hamiltonovskú cestu. Naviac, ak táto podmienka nie je splnená, tak existuje postupnosť $S^* \geq S$ stupňov grafu ktorý nemá hamiltonovskú cestu.Dokážte. Hint: uvážte graf $G'$ ktorý vznikne z $G$ pridaním nového vrchola a a pridaním hrán ktoré spájajú nový vrchol s každým vrcholom grafu $G$. Zrejme $G$ má hamiltonovskú cestu práve vtedy keď $G'$ má hamiltonovskú kružnicu. Ukážte, že $G'$ vyhovuje Chvátalovej podmienke(tu $n$ nahradíme s $n+1$).

8. Nech $G$ je graf s postupnosťou stupňov $d_1 \leq \cdots \leq d_n$ a $\overline{G}$ je komplementárny graf (t.j. na tej istej množine vrcholov, pričom obsahuje práve tie hrany, ktoré sa nevyskytujú v grafe $G$) s postupnosťou stupňov $d'_1 \leq \cdots \leq d'_n$. Ukážte, že ak $d_k \geq d'_k$ pre všetky $k \leq \frac{n}{2}$ tak $G$ má hamiltonovskú cestu. Odtiaľ odvoďte, ze graf izomorfný so svojím komlementom má hamiltonoskú cestu. Hint: vyjadrite postupnosť stupňov grafu $\overline{G}$ pomocou postupnosti stupňov grafu $G$, využite predchádzajúci príklad.