2 VETY O ZACHOVÁVANÍ

V tejto kapitole sa budeme podrobnejšie zaoberať súvisom medzi syntaktickým tvarom axióm teórií prvého rádu a zachovávaním týchto teórií pri základných konštrukciách s ich modelmi. Konkrétne budeme charakterizovať teórie, ktoré sa zachovávajú pri prechode k podštruktúram resp. nadštruktúram, teórie, ktoré sa zachovávajú pri zjednoteniach reťazcov, a teórie, ktoré sa prenášajú na homomorfné obrazy, ako teórie, ktoré sa dajú axiomatizovať pomocou axióm určitého dobre popísateľného syntaktického tvaru.

Naše úvahy začneme „inventarizáciou" najdôležitejších prostriedkov, ktoré budeme pritom používať. Medzi nimi nebudú samozrejme chýbať veta o úplnosti a veta o kompaktnosti. S ďalšími sa zoznámime v nasledujúcom paragrafe.

2.1 Lema o súčasnej bezospornosti, lema o konštantách a axiomatizačná lema

2.1.1 Lema o súčasnej bezospornosti. *Nech T a S sú teórie prvého rádu. Potom teória $T \cup S$ je sporná práve vtedy, keď existujú axiómy $\sigma_1(x_1, \dots, x_k)$, ... , $\sigma_n(x_1, \dots, x_k)$ teórie S také, že*

$$T \vdash (\exists\, x_1, \dots, x_k)(\neg\sigma_1(x_1, \dots, x_k) \vee \dots \vee \neg\sigma_n(x_1, \dots, x_k))$$

Dôkaz. Ak existujú také formuly $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, tak

$$S \vdash (\forall\, x_1, \dots, x_k)(\sigma_1(x_1, \dots, x_k) \wedge \dots \wedge \sigma_n(x_1, \dots, x_k))$$

v dôsledku čoho je $T \cup S$ zrejme sporná.

Naopak, ak $T \cup S$ je sporná, tak je sporná už nejaká teória tvaru $T \cup S_0$ kde $S_0 = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ je konečná podteória teórie S. Nech $x_1, \dots, x_k$ sú všetky premenné, ktoré su voľné v niektorej z formúl σ_i. Potom aj teória

$$T \cup \{(\forall\, x_1, \dots, x_k)(\sigma_1(x_1, \dots, x_k) \wedge \dots \wedge \sigma_n(x_1, \dots, x_k))\}$$

je sporná, čo znamená, že v T je dokázateľná negácia tejto formuly.

2.1.2 Lema o konštantách. *Nech T je teória prvého rádu v jazyku L, $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ je formula jazyka L a c_1, ... , c_k sú navzájom rôzne konštantné symboly, ktoré sa nevyskytujú v jazyku L. Potom*

$$T \vdash \varphi(c_1, \dots, c_k) \quad \Leftrightarrow \quad T \vdash (\forall\, x_1, \dots, x_k)\varphi(x_1, \dots, x_k)$$

Dôkaz. Predpokladajme, že $T \vdash \varphi(c_1, \ldots, c_k)$. Uvedomme si, že T je teória v jazyku L, ktorý neobsahuje konštanty $c_1, \ldots, c_k$, takže teória T „o nich nič nevie". Teda všetko, čo možno v T dokázať o týchto konštantách, možno dokázať aj o vhodných premenných $x_1, \ldots, x_k$ – stačí v príslušnom dôkaze nahradiť každý symbol c_i premennou x_i. Potom $T \vdash \varphi(x_1, \ldots, x_k)$ a potrebný záver vyplýva z pravidla zovšeobecnenia. Obrátená implikácia je triviálna.

Triedu všetkých modelov teórie T v jazyku L budeme značiť $\mathrm{Mod}(T)$. Hovoríme, že množina formúl Γ jazyka L je *množinou axióm teórie* T, ak $\mathrm{Mod}(T) = \mathrm{Mod}(\Gamma)$, t. j. pre každú L-štruktúru $\mathcal{A}$ platí $\mathcal{A} \vDash T$ práve vtedy, keď $\mathcal{A} \vDash \Gamma$.

2.1.3 Axiomatizačná lema. *Nech T je bezosporná teória v jazyku L a Δ je množina uzavretých formúl jazyka L uzavretá vzhľadom na konečné disjunkcie. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*
(i) *T má množinu axióm $\Gamma \subseteq \Delta$.*
(ii) *Pre ľubovoľné štruktúry $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ jazyka L platí:*
$$\mathcal{A} \vDash T \ \wedge \ \mathcal{B} \vDash \mathrm{Th}(\mathcal{A}) \cap \Delta \quad \Rightarrow \quad \mathcal{B} \vDash T$$

Na množinu Δ sa treba dívať ako na množinu formúl (logicky ekvivalentných s formulami) určitého syntaktického tvaru, napr. univerzálne formuly, existenčné formuly, pozitívne formuly, atď., resp formuly s nimi ekvivalentné.

Dôkaz. (i) ⇒ (ii): Predpokladajme, že T má množinu axiom $\Gamma \subseteq \Delta$. Nech ďalej platí $\mathcal{A} \vDash T$ a $\mathcal{B} \vDash \mathrm{Th}(\mathcal{A}) \cap \Delta$. Potom zrejme $\mathcal{B} \vDash \Gamma$, teda $\mathcal{B} \vDash T$.

(ii) ⇒ (i): Nech platí (ii). Označme Γ množinu všetkých uzavretých formúl φ jazyka L takých, že $\varphi \in \Delta$ a $T \vdash \varphi$. Ukážeme, že Γ je množina axióm pre T. Zrejme stačí dokázať inklúziu $\mathrm{Mod}(\Gamma) \subseteq \mathrm{Mod}(T)$ (obrátená inklúzia je totiž zrejmá – prečo?). Nech teda $\mathcal{B} \in \mathrm{Mod}(\Gamma)$. Ak máme s využitím podmienky (ii) dokázať, že $\mathcal{B} \in \mathrm{Mod}(T)$, čiže $\mathcal{B} \vDash T$, potrebujeme nájsť nejakú štruktúru $\mathcal{A} \vDash T$ takú, že $\mathcal{B} \vDash \mathrm{Th}(\mathcal{A}) \cap \Delta$. Poslednú podmienku možno ekvivalentne zapísať v tvare $\mathcal{A} \vDash \Sigma$, kde

$$\Sigma = \{\neg\delta \colon \delta \in \Delta, \, \mathcal{B} \vDash \neg\delta\}$$

(rozmyslite si prečo). Potrebujeme teda zaručiť, že teória $T \cup \Sigma$ má nejaký model $\mathcal{A}$. Na to stačí dokázať, že je bezosporná. V opačnom prípade by podľa Lemy 2.1.1 o súčasnej bezospornosti existovali nejaké formuly $\delta_1, \ldots, \delta_n \in \Delta$ také, že $\neg\delta_1, \ldots, \neg\delta_n \in \Sigma$ a $T \vdash \delta_1 \vee \ldots \vee \delta_n$. Označme δ poslednú formulu. Zrejme $\delta \in \Delta$, preto tiež $\delta \in \Gamma$, a keďže $\mathcal{B} \vDash \Gamma$, tak aj $\mathcal{B} \vDash \delta$. To je však spor s tým, že $\mathcal{B} \vDash \neg\delta_1, \ldots, \mathcal{B} \vDash \neg\delta_n$, teda $\mathcal{B} \vDash \neg\delta$.

2.2 Univerzálne teórie a podštruktúry

Hovoríme, že *teória T sa prenáša na podštruktúry*, ak ľubovoľná podštruktúra modelu teórie T je tiež modelom T.

2.2.1 Veta. *Nech T je bezosporná teória. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*
(i) *T má množinu univerzálnych axióm.*
(ii) *T sa prenáša na podštruktúry.*

Dôkaz. Sústredíme sa iba na netriválnu implikáciu (ii) $\Rightarrow$ (i). Nech platí (ii). Označme Π^0_1 množinu všetkých uzavretých formúl jazyka L ekvivalentných s univerzálnymi formulami. Zrejme Π^0_1 je uzavretá na konečné disjunkcie. Pomocou Axiomatizačnej lemy 2.1.3 dokážeme, že T má množinu axióm $\Gamma \subseteq \Pi^0_1$. Nech teda $\mathcal{A} \models T$ a $\mathcal{B} \models \mathrm{Th}(\mathcal{A}) \cap \Pi^0_1$. Ukážeme, že za týchto podmienok existuje L-štruktúra $\mathcal{C}$ taká, že $\mathcal{A} \equiv \mathcal{C}$ a $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$. Tým budeme hotoví, lebo potom $\mathcal{C} \models T$ a – keďže sa T prenáša na podštruktúry – aj $\mathcal{B} \models T$.

Inak povedané, potrebujeme nájsť štruktúru $(\mathcal{C}, b)_{b \in B}$ jazyka L_B, ktorá je modelom teórie $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) \cup \mathrm{D}(\mathcal{B})$. Stačí teda overiť, že táto teória v jazyku L_B je bezosporná. V opačnom prípade by pre nejaké $n \geq 1$ existovali formuly $\theta_1\big(\vec{b}\,\big), \ldots, \theta_n\big(\vec{b}\,\big) \in \mathrm{D}(\mathcal{B})$ také, že $\theta_i(x_1, \ldots, x_k)$ sú atomické alebo negatomické formuly jazyka L, $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_k) \in B^k$ a

$$\mathrm{Th}(\mathcal{A}) \vdash \neg\theta_1\big(\vec{b}\,\big) \vee \ldots \vee \neg\theta_n\big(\vec{b}\,\big)$$

No $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ je teória v jazyku L, v ktorom sa konštanty $b_1, \ldots, b_k$ nevyskytujú. Preto podľa lemy 2.1.2 o konštantách

$$\mathrm{Th}(\mathcal{A}) \vdash (\forall\, \vec{x}\,)\big(\neg\theta_1(\vec{x}\,) \vee \ldots \vee \neg\theta_n(\vec{x}\,)\big)$$

kde $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_k)$. Posledná formula je však uzavretá, univerzálna a platí v $\mathcal{A}$. Preto je splnená i v $\mathcal{B}$. To je však v spore s tým, že

$$\mathcal{B} \models (\exists\, \vec{x})(\theta_1(\vec{x}\,) \wedge \ldots \wedge \theta_n(\vec{x}\,))$$

Skrátené „vektorové“ označenie ako $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ alebo $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_k)$ pre usporiadané k-tice premenných resp. prvkov množín budeme ďalej používať bez zvláštneho upozornenia.

2.3 Existenčné teórie a nadštruktúry

Hovoríme, že *teória T sa prenáša na nadštruktúry*, ak ľubovoľná nadštruktúra modelu teórie T je tiež modelom teórie T.

2.3.1 Veta. *Nech T je bezosporná teória. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*
(i) *T má množinu existenčných axióm.*
(ii) *T sa prenáša na nadštruktúry.*

Dôkaz. Opäť sa sústredíme sa len na netriválnu implikáciu (ii) $\Rightarrow$ (i). Nech platí (ii). Označme Σ^0_1 množinu všetkých uzavretých formúl jazyka L ekvivalentných s existenčnými formulami. Zrejme Σ^0_1 je uzavretá na konečné disjunkcie. Pomocou Axiomatizačnej lemy 2.1.3 dokážeme, že T má množinu axióm $\Gamma \subseteq \Sigma^0_1$. Nech teda $\mathcal{A} \models T$ ako aj $\mathcal{B} \models \mathrm{Th}(\mathcal{A}) \cap \Sigma^0_1$. Z toho vyplýva, že $\mathcal{A} \models \mathrm{Th}(\mathcal{B}) \cap \Pi^0_1$ (rozmyslite si prečo). To je však rovnaká situácia ako v dôkaze predchádzajúcej vety, iba úlohy štruktúr $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ sú zamenené. Preto existuje štruktúra $\mathcal{C}$ taká, že $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ a $\mathcal{B} \equiv \mathcal{C}$. Potom – keďže T sa prenáša na nadštruktúry – platí $\mathcal{C} \models T$ a taktiež $\mathcal{B} \models T$.

2.4 Univerzálno-existenčné teórie a zjednotenia reťazcov

Pripomeňme, že pod *usporiadanou množinou* $(I;\leq)$ rozumieme množinu $I\neq\emptyset$ s binárnou reláciou $\leq$ spĺňajúcou nasledujúce podmienky:

$$
\begin{gathered}
(\forall\, x)(x\leq x)\\
(\forall\, x,y)(x\leq y\ \wedge\ y\leq x\ \Rightarrow\ x=y)\\
(\forall\, x,y,z)(x\leq y\ \wedge\ y\leq z\ \Rightarrow\ x\leq z)\\
(\forall\, x,y)(x\leq y\ \vee\ y\leq x)
\end{gathered}
$$

Reťazcom štruktúr nad usporiadanou množinou $(I;\leq)$ rozumieme systém štruktúr $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ nejakého jazyka prvého rádu L taký, že pre ľubovoľné prvky $i\leq j$ množiny I štruktúra $\mathcal{A}_i$ je podštruktúrou štruktúry $\mathcal{A}_j$, t.j. $\mathcal{A}_i\subseteq\mathcal{A}_j$. *Zjednotením reťazca* $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ nazývame L-štruktúru $\bar{\mathcal{A}}=\bigcup_{i\in I}\mathcal{A}_i$ so základnou množinou $\bar{A}=\bigcup_{i\in I}A_i$, na ktorej sú operačné a relačne symboly jazyka L interpretované nasledujúcim spôsobom:

Pre ľubovoľný n-árny operačný symbol f resp. relačný symbol r jazyka L a prvky $a_1,\dots,a_n\in\bar{A}$ kladieme

$$
\begin{gathered}
f^{\bar{\mathcal{A}}}(a_1,\dots,a_n)=f^{\mathcal{A}_i}(a_1,\dots,a_n)\\
(a_1,\dots,a_n)\in r^{\bar{\mathcal{A}}}\ \Leftrightarrow\ (a_1,\dots,a_n)\in r^{\mathcal{A}_i}
\end{gathered}
$$

kde i je ľubovoľný prvok množiny I taký, že $a_1,\dots,a_n\in A_i$.

(Samostatne si premyslite, že aspoň jeden taký prvok $i\in I$ vždy existuje, a ak $i,j\in I$ sú dva také prvky, tak uvedené interpretácie $f^{\bar{\mathcal{A}}}$, $r^{\bar{\mathcal{A}}}$ nezávisia na tom, ktorý z nich použijeme pri ich definícii.)

Zrejme ak množina $(I;\leq)$ má najväčší prvok m (špeciálne, ak I je konečná), tak $\bigcup_{i\in I}\mathcal{A}_i=\mathcal{A}_m$, teda uvedená konštrukcia môže priniesť niečo nové, len ak $(I;\leq)$ je nekonečná a nemá najväčší prvok. Typickým príkladom reťazcov štruktúr sú reťazce $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nad množinou $(\mathbb{N},\leq)$ všetkých prirodzených čísel s obvyklým usporiadaním. Také reťazce možno tiež zapísať v tvare

$$\mathcal{A}_0\subseteq\mathcal{A}_1\subseteq\ \dots\ \subseteq\mathcal{A}_n\subseteq\mathcal{A}_{n+1}\ \subseteq\dots$$

prípadne v tvare $(\mathcal{A}_n)_{n<\omega}$.

Jednoduchý dôkaz nasledujúceho tvrdenia ponechávame ako cvičenie čitateľovi.

2.4.1 Tvrdenie. *Nech $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ je reťazec štruktúr nad usporiadanou množinou $(I;\leq)$. Potom pre každé $j\in I$ platí $\mathcal{A}_j\subseteq\bigcup_{i\in I}\mathcal{A}_i$, čiže zjednotenie reťazca štruktúr je rozšírením každej zo štruktúr tohto reťazca. Navyše, ak štruktúra $\mathcal{B}$ je rozšírením každej zo štruktúr reťazca $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$, tak $\bigcup_{i\in I}\mathcal{A}_i\subseteq\mathcal{B}$; inak povedané, zjednotenie reťazca $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ je najmenšia štruktúra, ktorá je rozšírením každej zo štruktúr $\mathcal{A}_i$.*

Reťazec $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ štruktúr nad usporiadanou množinou $(I;\leq)$ nazývame *elementárnym reťazcom*, ak pre všetky dvojice prvkov $i\leq j$ z množiny I platí $\mathcal{A}_i\prec\mathcal{A}_j$, t. j. $\mathcal{A}_i$ je elementárnou podštruktúrou štruktúry $\mathcal{A}_j$.

2.4.2 Veta. *Nech $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ je elementárny reťazec štruktúr nad usporiadanou množinou $(I;\leq)$. Potom pre každé $j \in I$ platí $\mathcal{A}_j \prec \bigcup_{i\in I}\mathcal{A}_i$, čiže zjednotenie elementárneho reťazca štruktúr je elementárnym rozšírením každej zo štruktúr tohto reťazca.*

Dôkaz. Označme $\bar{\mathcal{A}} = \bigcup_{i\in I}\mathcal{A}_i$. Máme dokázať, že $\mathcal{A}_j \prec \bar{\mathcal{A}}$ pre každý člen $\mathcal{A}_j$ elementárneho reťazca $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$. To vyplýva z nasledujúceho tvrdenia:

Pre všetky L-formuly $\varphi(x_1,\dots,x_n)$, každé $j\in I$ a ľubovoľné prvky $a_1,\dots,a_n \in A_j$

$$\mathcal{A}_j \models \varphi(a_1,\dots,a_n) \quad\Leftrightarrow\quad \bar{\mathcal{A}} \models \varphi(a_1,\dots,a_n)$$

Dôkaz urobíme indukciou podľa zložitosti formuly φ. Ak φ je atomická, tak podmienka je triviálne splnená, lebo $\mathcal{A}_j \subseteq \bar{\mathcal{A}}$. Podobne, z platnosti uvedenej podmienky pre formuly φ, ψ očividne vyplýva jej platnosť pre konjunkciu $\varphi\wedge\psi$ aj pre negáciu $\neg\varphi$ (detaily prenechávame čitateľovi). Predpokladajme teda, že uvedená podmienka je splnená pre formulu $\varphi(x_0,x_1,\dots,x_n)$ a overme jej platnosť pre formulu $(\exists\, x_0)\varphi(x_0,x_1,\dots,x_n)$. Nech $j\in I$ a $a_1,\dots,a_n\in A_j$. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

(1) $\bar{\mathcal{A}} \models (\exists\, x_0)\varphi(x_0,a_1,\dots,a_n)$

(2) existuje $a_0 \in \bar{A}$ také, že $\bar{\mathcal{A}} \models \varphi(a_0,a_1,\dots,a_n)$

(3) existujú $k\in I$ a $a_0\in A_k$ také, že $k\geq j$ a $\bar{\mathcal{A}} \models \varphi(a_0,a_1,\dots,a_n)$

(Rozmyslite si, prečo si v (3) môžeme bez ujmy na všeobecnosti dovoliť predpoklad $k\geq j$.) Pre také $k\in I$ a $a_0\in A_k$ je podmienka $\bar{\mathcal{A}} \models \varphi(a_0,a_1,\dots,a_n)$ na základe indukčného predpokladu ekvivalentná s podmienkou $\mathcal{A}_k \models \varphi(a_0,a_1,\dots,a_n)$, teda podmienka (3) je postupne ekvivalentná s podmienkami

(4) existujú $k\in I$ a $a_0\in A_k$ také, že $k\geq j$ a $\mathcal{A}_k \models \varphi(a_0,a_1,\dots,a_n)$

(5) existuje $k\in I$ také, že $k\geq j$ a $\mathcal{A}_k \models (\exists\, x_0)\varphi(x_0,a_1,\dots,a_n)$

Napokon, kedže pre $j\leq k$ platí $\mathcal{A}_j \prec \mathcal{A}_k$, podmienka (5) je ekvivalentná s podmienkou

(6) $\mathcal{A}_j \models (\exists\, x_0)\varphi(x_0,a_1,\dots,a_n)$

ku ktorej sme chceli dospieť.

2.4.3 Tvrdenie. *Nech $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ je reťazec štruktúr nad usporiadanou množinou $(I;\leq)$ a $\varphi(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n)$ je formula, ktorá neobsahuje žiadne kvantifikátory. Predpokladajme, že*

$$\mathcal{A}_i \models (\forall\,\vec{x}\,)(\exists\,\vec{y}\,)\varphi(\vec{x},\vec{y}\,)$$

v každej zo štruktúr $\mathcal{A}_i$. Potom tiež

$$\bigcup_{i\in I}\mathcal{A}_i \models (\forall\,\vec{x}\,)(\exists\,\vec{y}\,)\varphi(\vec{x},\vec{y}\,)$$

Dôkaz. Za uvedeného predpokladu zvoľme ľubovoľné prvky $a_1,\dots,a_m \in \bigcup_{i\in I}A_i$. Potrebujeme dokázať existenciu nejakých prvkov $b_1,\dots,b_n\in\bigcup_{i\in I}A_i$ takých, že

$$\bigcup_{i\in I}\mathcal{A}_i \models \varphi(\vec{a},\vec{b}\,)$$

Za daných podmienok možno nájsť $j \in I$ také, že $a_1, \ldots, a_m \in A_j$. Keďže

$$\mathcal{A}_j \models (\forall \vec{x})(\exists \vec{y})\varphi(\vec{x}, \vec{y})$$

existujú prvky $b_1, \ldots, b_n \in A_j$ také, že $\mathcal{A}_j \models \varphi(\vec{a}, \vec{b})$. Nakoľko $\mathcal{A}_j \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$ a φ neobsahuje žiadne kvantifikátory, platí

$$\bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i \models \varphi(\vec{a}, \vec{b})$$

Hovoríme, že *teória T sa zachováva pri zjednoteniach reťazcov*, ak zjednotenie ľubovoľného reťazca modelov teórie T je tiež modelom T. Podobne možno definovať aj zachovávanie teórií pri zjednoteniach reťazcov nad usporiadanou množinou $(\mathbb{N}; \leq)$.

Formulu tvaru $(\forall x_1, \ldots, x_m)(\exists y_1, \ldots, y_n)\varphi(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$, kde φ je formula, ktorá neobsahuje žiadne kvantifikátory, nazývame *univerzálno-existenčnou formulou.*

2.4.4 Veta. *Nech T je bezosporná teória. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*
(i) *T má množinu univerzálno-existenčných axióm.*
(ii) *T sa zachováva pri zjednoteniach reťazcov.*
(iii) *T sa zachováva pri zjednoteniach reťazcov nad* $(\mathbb{N}; \leq)$.

Dôkaz. Platnosť implikácie (i) ⇒ (ii) vyplýva z predchádzajúceho tvrdenia a implikácia (ii) ⇒ (iii) je triviálna. Stačí sa teda sústrediť na implikáciu (iii) ⇒ (i).

Nech platí (iii). Označme Π^0_2 množinu všetkých uzavretých formúl jazyka L ekvivalentných s univerzálno-existenčnými formulami. Zrejme Π^0_2 je uzavretá na konečné disjunkcie. Pomocou Axiomatizačnej lemy 2.1.3 dokážeme, že T má množinu axióm $\Gamma \subseteq \Pi^0_2$. Nech teda $\mathcal{A} \models T$ a platí

(0) $\mathcal{B} \models \mathrm{Th}(\mathcal{A}) \cap \Pi^0_2$

Za týchto podmienok zostrojíme dve postupnosti štruktúr $(\mathcal{A}_n)_{n<\omega}$, $(\mathcal{B}_n)_{n<\omega}$ jazyka L také, že $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$, $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$, pre každé n platí $\mathcal{A}_n \equiv \mathcal{A}_{n+1}$, preto tiež $\mathcal{A}_n \equiv \mathcal{A}$, ako aj $\mathcal{B}_n \prec \mathcal{B}_{n+1}$, pričom obe postupnosti dohromady tvoria striedavo vzájomne poprekladaný reťazec

$$\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1} \subseteq \mathcal{B}_{n+1} \subseteq \ldots$$

Označme $\mathcal{C}$ jeho zjednotenie. Potom zároveň platí

$$\mathcal{C} = \bigcup_{1 \leq n < \omega} \mathcal{A}_n = \bigcup_{n<\omega} \mathcal{B}_n$$

Keďže teória T sa zachováva pri zjednoteniach reťazcov nad $(\mathbb{N}; \leq)$ a všetky $\mathcal{A}_n$ sú jej modelmi, platí $\mathcal{C} \models T$. Pretože reťazec $(\mathcal{B}_n)_{n<\omega}$ je elementárny, dostávame $\mathcal{B} \prec \mathcal{C}$, teda konečne $\mathcal{B} \models T$. Tým podľa Axiomatizačnej lemy 2.1.3 zabezpečíme, že T má množinu univerzálno-existenčných axióm.

Ukážeme, že za podmienky (0) platí nasledujúce tvrdenie:

(1) *Existujú štruktúry $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$ také, že $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}'$, $\mathcal{B} \prec \mathcal{B}'$ a $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{B}'$.*

Keďže každá univerzálna formula je zároveň univerzálno-existenčná, z podmienky (0) vyplýva, že $\mathcal{B} \models \mathrm{Th}(\mathcal{A}) \cap \Pi^0_1$. Ako sme videli v dôkaze Vety 2.2.1, za tejto podmienky je teória $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) \cup \mathrm{D}(\mathcal{B})$ bezosporná a existuje štruktúra $\mathcal{A}'_B = (\mathcal{A}', b)_{b\in B}$, ktorá je modelom teórie $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) \cup \mathrm{D}(\mathcal{B})$ v jazyku L_B. Potom $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{A}$ a $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}'$.

Hľadanú štruktúru $\mathcal{B}'$ získame zo štruktúry $(\mathcal{B}', b, a)_{b\in B, a\in A'}$ jazyka $L_{B,A'} = (L_B)_{A'}$, od ktorej budeme požadovať, aby bola modelom teórie $\mathrm{Th}(\mathcal{B}_B) \cup \mathrm{D}(\mathcal{A}')$ v tomto jazyku. Stačí teda overiť, že uvedená teória je bezosporná. V opačnom prípade by podľa lemy o súčasnej bezospornosti existovali formuly $\theta_1(\vec{a}\,), \ldots, \theta_n(\vec{a}\,) \in \mathrm{D}(\mathcal{A}')$, kde $\theta_i(x_1, \ldots, x_k)$ sú atomické alebo negatomické formuly jazyka L a $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in (A')^k$, také, že

$$\mathrm{Th}(\mathcal{B}_B) \vdash \neg\theta_1(\vec{a}\,) \vee \ldots \vee \neg\theta_n(\vec{a}\,)$$

Keďže $\mathrm{Th}(\mathcal{B}_B)$ je teória v jazyka L_B, v ktorom sa konštanty $a_1, \ldots, a_k$ nevyskytujú, podľa lemy o konštantách z toho vyplýva, že

$$\mathrm{Th}(\mathcal{B}_B) \vdash (\forall\,\vec{x}\,)(\neg\theta_1(\vec{x}\,) \vee \ldots \vee \neg\theta_n(\vec{x}\,))$$

Nakoľko to je formula jazyka L, znamená to, že musí byť splnená v $\mathcal{B}$. Zároveň však

$$\mathcal{A}' \models (\exists\,\vec{x}\,)(\theta_1(\vec{x}\,) \wedge \ldots \wedge \theta_n(\vec{x}\,))$$

a keďže $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{A}$, tak posledná formula platí aj v $\mathcal{A}$. Nakoľko to však je existenčná, teda tým skôr univerzálno-existenčná formula, tak podľa predpokladu (0) je splnená tiež v $\mathcal{B}$. Tento spor dokazuje (1).

Na záver si uvedomme, že pre takto získané čiarkované štruktúry opäť platí podmienka (0), t. j. $\mathcal{B}' \models \mathrm{Th}(\mathcal{A}') \cap \Pi^0_2$, takže celú konštrukciu možno iterovať. Postupne tak dostávame štruktúry $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}'$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}'$ zo štruktúr $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$, $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$, ako aj štruktúry $\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}'_n$, $\mathcal{B}_{n+1} = \mathcal{B}'_n$ zo štruktúr $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{B}_n$ pre $n \geq 1$.

2.4.5 Úloha. Uvažujme grupy ako štruktúry $(G;\ \cdot)$ s jednou binárnou operáciou. Potom teória grúp je daná dvoma axiómami: asociatívnym zákonom

$$(\forall\, x, y, z)\big(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z\big)$$

a axiómou vyjadrujúcou existenciu jednotkového prvku ako i inverzných prvkov

$$(\exists\, u)(\forall\, x)\big(x \cdot u = x = u \cdot x \,\wedge\, (\exists\, y)(x \cdot y = u = y \cdot x)\big)$$

ktorú možno nahradiť axiómou

$$(\forall\, x)(\exists\, y)(\forall\, z)\big(z \cdot (x \cdot y) = z = (y \cdot x) \cdot z\big)$$

Ani jedna z uvedených dvoch axióm však nie je univerzálno-existenčná. Preto možno prekvapí, že teória grúp (v takomto jazyku) sa zachováva pri zjednoteniach reťazcov. Inak povedané, ak $\big((G_i;\ \cdot)\big)_{i\in I}$ je reťazec grúp nad usporiadanou množinou $(I; \leq)$, tak aj jeho zjednotenie $\Big(\bigcup_{i\in I} G_i\,;\ \cdot\Big)$ je grupa. Dokážte si to samostatne.

Z Vety 2.4.4 potom vyplýva, že teória grúp musí mať množinu univerzálno-existenčných axióm v jazyku s jediným binárnym operačným symbolom $\cdot$. Nájdite takúto axiomatizáciu teórie grúp.

2.5 Algebraický uzáver poľa

Axiómy teórie polí ako štruktúr $(F;\,+,\cdot,0,1)$ jazyka s dvomi binárnymi operáciami $+$ a $\cdot$ a dvomi konštantami 0 a 1 sú našim čitateľom určite dobre známe, takže ich tu nebudeme explicitne vypisovať. Stačí, ak si uvedomíme, že popri univerzálnych axiómach (identitách) vyjadrujúcich komutatívne a asociatívne zákony pre obe operácie, úlohy 0 a 1 ako neutrálnych prvkov týchto operácií a distributívny zákon, k nim patria ešte dve univerzálno-existenčné axiómy

$$(\forall\,x)(\exists\,y)(x+y=0) \quad \text{a} \quad (\forall\,x)(\exists\,y)(x\neq 0 \;\Rightarrow\; x\cdot y=1)$$

zaručujúce existenciu inverzných prvkov oboch operácií. Z vety o zachovávaní teórií pri zjednoteniach reťazcov potom vyplýva, že aj teória polí sa zachováva pri zjednoteniach reťazcov, to znamemá, že zjednotením ľubovoľného reťazca polí $\big((F_i;+,\cdot,0,1)\big)_{i\in I}$ nad usporiadanou množinou $(I;\leq)$ dostaneme opäť pole $\Big(\bigcup_{i\in I} F_i\,;\,+,\cdot,0,1\Big)$.

Zjednotenia reťazcov sa v teórií polí hojne využívajú. Ich najdôležitejším uplatnením je konštrukcia *algebraického uzáveru poľa*, s ktorou sa teraz zoznámime.

Ďalej už budeme, ako je bežne zvykom, pole $(F;\,+,\cdot,0,1)$ značiť väčšinou iba F, teda rovnako ako jeho základnú množinu. Hovoríme, že pole K je *algebraickým rozšírením* poľa F, ak F je podpoľom poľa K a každý prvok poľa K je algebraický nad F, t. j. je koreňom nejakého polynómu $p(x)$ s koeficientmi z poľa F.

Čiateľ by si mal z prednášok z algebry pamätať niekoľko výsledkov o algebraických rozšíreniach polí, ktoré tu stručne zrekapitulujeme. Ak $p(x)\in F[x]$ je ireducibilný polynóm stupňa ≥ 2 nad poľom F, tak faktorový okruh $F[x]/(p(x))$ okruhu polynómov $F[x]$ podľa hlavného ideálu $(p(x))$ generovaného polynóm $p(x)$ je opäť pole, ktoré je navyše rozšírením poľa F. V tomto poli už polynóm $p(x)$ má koreň (je ním rozkladová trieda $x+(p(x))$), teda nie viac je ireducibilný. Takéto rozšrenia poľa F nazývame jeho *jednoduchými rozšíreniami.* Zrejme každé jednoduché rozšírenie poľa F je algebraické. Taktiež možno ľahko nahliadnuť, že pre ľubovoľné polia F, H, K platí: ak H je algebraickým rozšíremím poľa F a K je algebraickým rozšírením poľa H, tak K je algebraickým rozšírením poľa F.

Jednoduchý dôkaz nasledujúceho pomocného tvrdenia prenechávame ako cvičenie čitateľovi.

2.5.1 Lema. *Nech $(F_i)_{i\in I}$ je reťazec polí nad usporiadnou množinou $(I;\leq)$, z ktorých každé je algebraickým rozšírením poľa F. Potom aj zjednotenie tohto reťazca $\bigcup_{i\in I} F_i$ je algebraickým rozšírením poľa F.*

Hovoríme, že pole K je *algebraicky uzavreté*, ak každý polynóm $p\in K[x]$ stupňa ≥ 2 má v K aspoň jeden koreň. Ľahko nahliadneme, že pole K je algebraicky uzavreté práve vtedy, keď jedinými ireducibilnými normovanými polynómami stupňa ≥ 1 nad K sú lineárne polynómi tvaru $x-a$, kde $a\in K$. Z toto ďalej vyplýva, že v algebraicky uzavretom poli má každý polynóm stupňa $n\geq 1$ práve n koreňov, ak každý koreň počítame toľkokrát, aká jej jeho násobnosť. Pole K nazývame *algebraickým uzáverom* poľa F, ak K je algebraicky uzavreté pole, ktoré je algebraickým rozšírením poľa F.

2.5.2 Veta. *Ku každému poľu existuje jeho algebraický uzáver.*

Dodávame, že algebraický uzáver ľubovoľného poľa je navyše určený jednoznačne až na izomorfizmus. Dôkaz tohto výsledku však už nie je náplňou nášo kurzu.

Dôkaz. Nech F je ľubovoľné pole. Najprv zostrojíme algebraické rozšírenie $\widehat{F}$ poľa F, v ktorom má každý ireducibilný polynóm $p(x) \in F[x]$ stupňa ≥ 2 koreň. Inak povedané, neexistuje polynóm $p(x) \in F[x]$ stupňa ≥ 2 ireducibilný nad poľom $\widehat{F}$. Nech $(p_\alpha(x))_{\alpha<\rho}$ je ľubovoľné očíslovanie množiny všetkých normovaných ireducibilných polynómov stupňa ≥ 2 z okruhu $F[x]$ ordinálnymi číslami menšími ako nejaké ordinálne číslo ρ. Transfinitnou rekurziou cez ordinály $\alpha < \rho$ zostrojíme transfinitnú postupnosť $(F_\alpha)_{\alpha<\rho}$ rozšírení poľa F takú, že

$$
\begin{aligned}
F_0 &= F \\
F_{\alpha+1} &= \begin{cases} F_\alpha[x]/(p_\beta(x)), & \text{kde } \beta < \rho \text{ je prvý ordinál taký, že polynóm} \\ & p_\beta(x) \text{ je ireducibilný nad poľom } F_\alpha \\ F_\alpha, & \text{ak taký ordinál } \beta \text{ neexistuje} \end{cases} \\
F_\lambda &= \bigcup_{\alpha<\lambda} F_\alpha
\end{aligned}
$$

pre ľubovoľný ordinál $\alpha < \rho$, resp. pre limitný ordinál $\lambda < \rho$. Zrejme pre ľubovoľné $\alpha \leq \beta < \rho$ je pole F_β rozšírením poľa F_α, teda $(F_\alpha)_{\alpha<\rho}$ je reťazec polí nad usporiadanou množinou $(\{\alpha\colon \alpha < \rho\}; \leq)$.

Transfinitnou indukciou dokážeme, že každé z polí F_α je algebraickým rozšírením poľa F. Pre $\alpha = 0$ je to zrejmé. Nech $\alpha < \rho$ je ľubovoľný ordinál; predpokladajme, že F_α je algebraickým rozšírením poľa F. Potom $F_{\alpha+1}$ je buď jednoduché (teda algebraické) rozšírenie $F_\alpha[x]/(p_\beta(x))$ poľa F_α, alebo je to samotné pole F_α. Teda v oboch prípaoch ide o algebraické rozšírenie poľa F. Konečne, nech $\lambda < \rho$ je limitný ordinál. Predpokladajme, že všetky polia F_α, pre $\alpha < \lambda$, sú algebraické rozšírenia poľa F. Potom aj F_λ, ako zjednotenie reťazca $(F_\alpha)_{\alpha<\lambda}$, je jeho algebraickým rozšírením na základe lemy 2.5.1.

Teraz položíme $\widehat{F} = \bigcup_{\alpha<\rho} F_\alpha$. Potom aj pole $\widehat{F}$, ako zjednotenie reťazca $(F_\alpha)_{\alpha<\rho}$ algebraických rozšírení poľa F, je samo algebraickým rozšírením poľa F. Zrejme každý ireducibilný polynóm stupňa ≥ 2 nad poľom F má koreň v niektorom z polí F_α, teda aj v poli $\widehat{F}$.

S využitím práve opísanej konštrukcie zostrojíme ešte jeden reťazec $\left(F^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ algebraických rozšírení poľa F nad usporiadanou množinou $\mathbb{N}$ všetkých prirodzených čísel taký, že

$$F^{(0)} = F \qquad \text{a} \qquad F^{(n+1)} = \widehat{F^{(n)}}$$

pre $n \in \mathbb{N}$. Potom aj zjednotenie tohto reťazca $\widetilde{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F^{(n)}$ je algebraickým rozšírením poľa F. Dokážeme, že je to zároveň algebraicky uzavreté pole. Na to stačí overiť, že neexistujú normované ireducibilné polynómy $p(x) \in \widetilde{F}[x]$ stupňa ≥ 2. Predokladajme teda, že

$$p(x) = x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_{k-1}x + a_k \in \widetilde{F}[x]$$

je normovaný ireducibilný polynóm stupňa $k \geq 2$. Potom existuje $n \in \mathbb{N}$, také, že pole $F^{(n)}$ obsahuje všetky jeho koeficienty $a_1, \dots, a_k$, teda $p(x) \in F^{(n)}[x]$ je normovaný ireducibilný polynóm nad poľom $F^{(n)}$. Potom však $p(x)$ má koreň v poli $F^{(n+1)} = \widehat{F^{(n)}}$, preto aj v poli $\widetilde{F}$. Ale to znamená, že – navzdory pôvodnému predpokladu – polynóm $p(x)$ nie je ireducibilný nad poľom $\widetilde{F}$. Tým sme dokázali, že pole $\widetilde{F}$ je algebraický uzáver poľa F.

2.6 Pozitívne teórie a homomorfné obrazy

Hovoríme, že *teória T sa prenáša na homomorfné obrazy*, ak homomorfný obraz ľubovoľného modelu teórie T je tiež modelom T.

2.6.1 Veta. *Nech T je bezosporná teória. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*
(i) *T má množinu pozitívnych axióm.*
(ii) *T sa prenáša na homomorfné obrazy.*

Dôkaz. Opäť sa sústredíme len na implikáciu (ii) $\Rightarrow$ (i) Nech platí (ii). Pre ľubovoľné rozšírenie L_C jazyka L o nové konštanty označíme $\mathrm{Pos}(L_C)$, resp. $\mathrm{Neg}(L_C)$ množinu všetkých uzavretých formúl jazyka L_C ekvivalentných s pozitívnymi, resp. negatívnymi formulami. Zrejme $\mathrm{Pos}(L)$ je uzavretá na konečné disjunkcie. Pomocou Axiomatizačnej lemy 2.1.3 dokážeme, že T má množinu axióm $\Gamma \subseteq \mathrm{Pos}(L)$. Nech teda $\mathcal{A} \models T$ a platí

(0) $\mathcal{B} \models \mathrm{Th}(\mathcal{A}) \cap \mathrm{Pos}(L)$.

Za tohto predpokladu dokážeme nasledujúce tvrdenia:

(1) Existuje elementárne rozšírenie $\mathcal{B}' \succ \mathcal{B}$ a homomorfizmus $h\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}'$ také, že $(\mathcal{B}', h(a))_{a\in A} \models \mathrm{Th}(\mathcal{A}_A) \cap \mathrm{Pos}(L_A)$.

(2) Existuje elementárne rozšírenie $\mathcal{A}' \succ \mathcal{A}$ a zobrazenie $g\colon B \to A'$ také, že $(\mathcal{B}, b)_{b\in B} \models \mathrm{Th}(\mathcal{A}', g(b))_{b\in B} \cap \mathrm{Pos}(L_B)$.

(1) Uvažujme teóriu $\mathrm{Th}(\mathcal{B}_B) \cup \big(\mathrm{Th}(\mathcal{A}_A) \cap \mathrm{Pos}(L_A)\big)$ v jazyku $L_{A,B}$. Z predpokladu (0) ľahko nahliadneme, že je bezosporná. Nech $(\mathcal{B}', h(a), b)_{a\in A, b\in B}$ je jej model, kde $\mathcal{B}$ je štruktúra jazyka L. Potom $\mathcal{B} \prec \mathcal{B}'$, a platí $(\mathcal{B}', h(a))_{a\in A} \models \mathrm{Th}(\mathcal{A}_A) \cap \mathrm{Pos}(L_A)$, z čoho okrem iného vyplýva, že $h\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je homomorfizmus.

(2) Rovnako ako v prípade (1) možno na základe predpokladu (0) nahliadnuť bezospornosť teórie $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_A) \cup \big(\mathrm{Th}(\mathcal{B}_B) \cap \mathrm{Neg}(L_B)\big)$ v jazyku $L_{A,B}$. Nech $(\mathcal{A}', a, g(b))_{a\in A, b\in B}$ je jej model, kde $\mathcal{A}'$ je štruktúra jazyka L. Potom $\mathcal{A} \prec \mathcal{A}'$ a pre zobrazenie $g\colon B \to A$ platí $(\mathcal{B}, b)_{b\in B} \models \mathrm{Th}(\mathcal{A}', g(b))_{b\in B}$.

Striedavou iteráciou konštrukcií (1), (2) teraz zostrojíme dve postupnosti $(\mathcal{A}_n)_{n<\omega}$, $(\mathcal{B}_n)_{n<\omega}$ štruktúr jazyka L, spolu so zobrazeniami $g_n\colon B_n \to A_{n+1}$ a homomorfizmami $h_{n+1}\colon \mathcal{A}_{n+1} \to \mathcal{B}_{n+1}$ v nasledujúcich krokoch:

0° Na začiatok položíme $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$, $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$.

1° Štruktúru $\mathcal{A}_{n+1}$ a zobrazenie $g_n\colon B_n \to A_{n+1}$ také, že platí

$$(\mathcal{B}_n, b)_{b\in B_n} \models \mathrm{Th}(\mathcal{A}_{n+1}, g_n(b))_{b\in B_n} \cap \mathrm{Pos}(L_{B_n})$$

zostrojíme zo štruktúr $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{B}_n$ jazyka L podľa (2).

2° Štruktúru $(\mathcal{B}_1, b)_{b\in B_0}$ a homomorfizmus $h_1\colon (\mathcal{A}_1, g_0(b))_{b\in B_0} \to (\mathcal{B}_1, b)_{b\in B_0}$ také, že platí

$$(\mathcal{B}_1, b, h_1(a))_{b\in B_0, a\in A_1} \vDash \mathrm{Th}(\mathcal{A}_1, g_0(b), a)_{b\in B_0, a\in A_1} \cap \mathrm{Pos}(L_{B_0, A_1})$$

dostaneme zo štruktúr $(\mathcal{A}_1, g_0(b))_{b\in B_0}$, $(\mathcal{B}_0, b)_{b\in B_0}$ jazyka L_{B_0} podľa (1).

3° Konečne pre $n \geq 1$ štruktúru $(\mathcal{B}_{n+1}, h_n(a), b)_{a\in A_n, b\in B_n}$ spolu s homomorfizmom $h_{n+1}\colon (\mathcal{A}_{n+1}, a, g_n(b))_{a\in A_n, b\in B_n} \to (\mathcal{B}_{n+1}, h_n(a), b)_{a\in A_n, b\in B_n}$ tak, že platí

$$\begin{aligned}(\mathcal{B}_{n+1}, h_n(a), b, h_{n+1}(a'))_{a\in A_n, b\in B_n, a'\in A_{n+1}} &\vDash \\ &\vDash \mathrm{Th}(\mathcal{A}_{n+1}, a, g_n(b), a')_{a\in A_n, b\in B_n, a'\in A_{n+1}} \cap \mathrm{Pos}(L_{A_n, B_n, A_{n+1}})\end{aligned}$$

zostrojíme podľa (1) zo štruktúr $(\mathcal{A}_{n+1}, a, g_n(b))_{a\in A_n, b\in B_n}$, $(\mathcal{B}_n, h_n(a), b)_{a\in A_n, b\in B_n}$ jazyka L_{A_n, B_n}.

Pritom si treba uvedomiť, že práve splnenie uvedených podmienok, t. j. predpokladov typu (0), zakaždým zabezpečuje uskutočniteľnosť nasledujúceho kroku. Takto dostaneme dva vzájomne prepojené elementárne reťazce

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_0 \arrow[r, "\prec"] & \mathcal{A}_1 \arrow[r, "\prec"] \arrow[d, "h_1"] & \cdots \arrow[r, "\prec"] & \mathcal{A}_n \arrow[r, "\prec"] \arrow[d, "h_n"] & \mathcal{A}_{n+1} \arrow[r, "\prec"] \arrow[d, "h_{n+1}"] & \cdots \\
\mathcal{B}_0 \arrow[r, "\prec"] \arrow[ur, "g_0"'] & \mathcal{B}_1 \arrow[r, "\prec"] & \cdots \arrow[r, "\prec"] & \mathcal{B}_n \arrow[r, "\prec"] \arrow[ur, "g_n"'] & \mathcal{B}_{n+1} \arrow[r, "\prec"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Krok 3° o. i. zaručuje, že pre $n \geq 1$ a ľubovoľné $a \in A_n$ platí $h_n(a) = h_{n+1}(a)$, t. j. $h_n = h_{n+1} \restriction A_n$. Podobne, kroky 2° a 3° zaručujú, že pre každé n a ľubovoľné $b \in B_n$ platí $h_{n+1}(g_n(b)) = b$, preto tiež $B_n \subseteq h_{n+1}(A_{n+1})$.

Utvorme zjednotenia elementárnych reťazcov

$$\mathcal{A}_\omega = \bigcup_{n<\omega} \mathcal{A}_n \qquad\qquad \mathcal{B}_\omega = \bigcup_{n<\omega} \mathcal{B}_n$$

Taktiež položme

$$h_\omega = \bigcup_{1\leq n<\omega} h_n$$

Potom $\mathcal{A} \prec \mathcal{A}_\omega$, $\mathcal{B} \prec \mathcal{B}_\omega$ a $h_\omega\colon \mathcal{A}_\omega \to \mathcal{B}_\omega$ je zrejme surjektívny homomorfizmus. Z podmienky $\mathcal{A} \vDash T$ vyplýva, že $\mathcal{A}_\omega \vDash T$, a keďže T sa prenáša na homomorfné obrazy, tiež $\mathcal{B}_\omega \vDash T$, teda konečne $\mathcal{B} \vDash T$. Podľa Axiomatizačnej lemy 2.1.3 má T množinu pozitívnych axióm.