

Hilbertov program a Gödelove vety o neúplnosti

Pavol Zlatoš

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

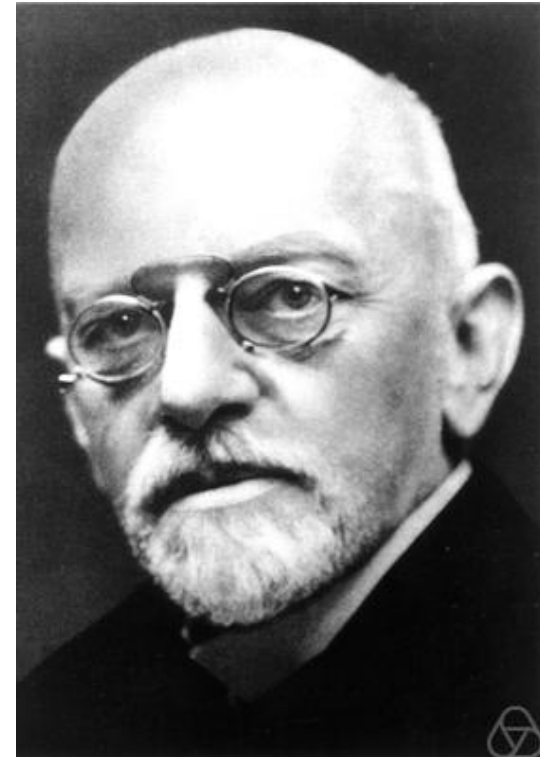
Univerzita Komenského, Bratislava

Olomouc, 18. 11. 2025

Hlavné postavy



Kurt Gödel
(1906 – 1978)



David Hilbert
(1862 – 1943)

“Mystické” interpretácie Gödelových viet o neúplnosti

- Ľudské poznanie je nevyhnutne neúplné.
- Ľudské poznanie nie je možné uzavrieť do akéhokoľvek vopred daného formálneho systému.
- Ľudský intelekt vďaka svojej schopnosti reflexie presahuje akýkoľvek počítač.
- Nijako sa nedá vopred zaručiť, že naše úvahy nepovedú k logickému sporu.
- Nikdy si nebudeme môcť byť istí, či matematika nie je sporná.

Holý fakt

*Gödelove vety ukazujú neuskutočniteľnosť
Hilbertovho programu
v jeho pôvodnej podobe.*

Mýtus široko rozšírený (aj medzi matematikmi)

- Hilbertov program formalizácie matematiky mal pretransformovať matematiku na bezobsažnú hru so symbolmi podľa istých vopred stanovených pravidiel, a tým z nej eliminovať potrebu tvorivej ľudskej činnosti.
- Vďaka Gödelovi teda môžeme so zadostučinením konštatovať, že tento naivný, suchopárny a nekrofilný zámer Hilbertovi nevyšiel, a my, *tvoriví* matematici, sme a aj naďalej budeme pre pokrok poznania nepostrádateľní.

Čo bude nasledovať?

- Okolnosti a dôvody vzniku Hilbertovho programu.
- Ciele Hilbertovho programu.
- Formulácia Gödelových viet a základné myšlienky ich dôkazu.
- Vzťah Gödelových viet a Hilbertovho programu.

Jednota matematiky

Vnútrotná jednota matematiky je v novoveku silne pociťovaná v dôsledku viacerých objavov:

- Descartov objav súradnicovej sústavy zjednocujúcej algebru (aj analýzu) a geometriu (1637).
- Objav a rozpracovanie infinitezimálneho počtu – možnosť zachytiť matematickými prostriedkami pohyb, formulovať fyzikálne zákony, ako aj zvládnuť zložité geometrické útvary pomocou elementárnych (Newton, Leibniz, Euler, Laplace, Lagrange, Hamilton, Gauss, Cauchy, ... – cca. 1670–1830).
 - ★ *Používanie nekonečne malých a nekonečne veľkých veličín však neraz spôsobuje ťažkosti – sformulovať vyčerpávajúcim spôsobom pravidlá “čo sa môže a čo nie” sa nepodarilo.*
- Riemannov (1854) a Kleinov (1872) zjednocujúci pohľad na rôzne druhy geometrií (Euklides, Gauss, Bolyai, Lobačevskij, Cayley, ...).

Silnie potreba dať tejto prejavenej a pociťovanej jednote matematiky “inštitucionalizovanú” podobu.

Dôvody v prospech prijatia Cantorovej teórie množín a rekonštrukcie matematiky v rámci univerza množín koncom 19. a začiatkom 20. storočia

- Teória množín dáva celej vtedajšej matematike k dispozícii univerzálny jazyk a v univerze množín poskytuje všetkým matematickým disciplínam dostatočný priestor na sprítomnenie, modelovanie či množinovo-teoretickú rekonštrukciu všetkých dovtedy nimi študovaných oborov objektov (podľa Hilberta: *raj stvorený pre nás Cantorom*).
- Ťažkosti a paradoxy pôvodného infinitezimálneho počtu, vyvolávané používaním nekonečne malých a nekonečne veľkých veličín definitívne(?) prekonané Weierstrassom (cca. 1850) – matematická analýza založená na pojme limity ($\varepsilon\delta$ -analýza).
- Cantorom a Dedekindom vybudovaný množinový model reálnych čísel (cca. 1870 až 1875) poskytuje $\varepsilon\delta$ -analýze pevný základ.

Aká je cena?

- Za vylúčenie nekonečne malých a nekonečne veľkých veličín sa však platí prijatím *aktuálne nekonečných* množín.
 - ★ Dokonca jednotlivé reálne čísla sú modelované ako aktuálne nekonečné množiny.
- Dovtedy prevládajúcim poňatím nekonečna je totiž *nekonečno potenciálne*.
 - ★ Formulácia analýzy v jazyku “ $(\forall \varepsilon)(\exists \delta)(\dots)$ ” sa zdanlivo vracia k pôvodnému poňatiu – procesuálny charakter.

Kríza teórie množín a základov matematiky vyvolaná objavom paradoxov

- V Cantorovej teórii množín ako aj vo Fregeho logickom systéme možno zreprodukovať niektoré paradoxy známe od čias antiky (napr. paradox klamára), ale i niektoré paradoxy novšieho dáta.
- Tu sa z nich stávajú logické spory – ich objav na konci 19. storočia má šokujúci účinok.
- “Hlavným vinníkom” je Cantorov “naivný” vymedzovací princíp:
pre ľubovoľnú vlastnosť $V(x)$ možno vytvoriť množinu $\{x \mid V(x)\}$.
★ Napr. pre Russellovu množinu $R = \{x \mid x \notin x\}$ platí
 $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$ – spor.
Množinová verzia Epimenidovho paradoxu: *Táto veta je nepravdivá.*
- Na jednej strane viera, že paradoxy sa podarí odstrániť a prekonať, na druhej obava, že aktuálne nekonečné množiny *nevyhnutne* spôsobujú podobné problémy ako predtým nekonečne malé a nekonečne veľké veličiny.

Navrhnuté východiská

- *Logicizmus*, t.j. rekonštrukcia matematiky ako súčasti logiky: Russell a Whitehead v *Principia Mathematica* (PM), 1910–13, vychádzajú z Fregeho myšlienok.
 - ★ Zúženie vymedzovacieho princípu v rámci *teórie typov*.
 - ★ Neskôr Quine v *New Foundations* (NF) len na *stratifikované formuly* $V(x)$.
- *Zermelov axiomatický systém* Cantorovej teórie množín (1908) neskôr doplnený Fraenkelom (ZF resp. ZFC, t.j. ZF s axiómou výberu).
 - ★ Zúženie vymedzovacieho princípu len na *formuly* $V(x)$ *jazyka teórie množín* a prvky *vopred danej množiny* A , t.j. $\{x \in A \mid V(x)\}$.
 - ★ Tri výnimky: axiómy dvojice, zjednotenia a potenčnej množiny.

Negatívne reakcie

- Odmietnutie aktuálneho nekonečna (Poincaré).
- V radikálnej podobe *intuicionizmus* (Brouwer 1908-10).
Spochybnenie niektorých zákonov klasickej logiky:
 - ★ zákon vylúčeného tretieho $A \vee \neg A$;
 - ★ zákon dvojitej negácie $\neg\neg A \Rightarrow A$;
 - ★ odmietnutie axiómy výberu a nekonštruktívnych existenčných dôkazov vôbec.
- Hrozí drastická redukcia klasickej matematiky.

Trocha filozofie

Ako je to naozaj?

Existujú alebo neexistujú aktuálne nekonečné množiny?

- Hilbert pripúšťa, že aktuálne nekonečno sa nerealizuje nijakým súborom reálnych objektov.

Ale o to nejde!

- Vďaka kvantovej mechanike vie, že ani vo fyzike nemusia zďaleka všetky teoretické konštrukcie zodpovedať reálnym javom či objektom.
- V matematike je to jasné dávno – nula a záporné čísla, imaginárne čísla, nevlastné body a nevlastná priamka v projektívnej geometrii, atď. Názorná interpretácia obvykle prichádza dodatočne.
- Z matematického hľadiska teda ide o nezmyselnú otázku a spory okolo nej sú jalové!
- Filozofická téza v pozadí: v matematike *existencia = bezospornosť*.

Správne otázky

- Je abstrakcia aktuálneho matematického nekonečna užitočná?
Určite áno!
- Možno o nekonečných množinách bezosporne uvažovať?
To je práve problém, ale veríme, že áno.
Treba to však dokázať!

Odpoveď na výzvu: Hilbertov program

- Hilbertov program je pokusom vyviesť matematiku z krízy vyvolanej objavom paradoxov a zároveň obranou teórie množín, klasickej logiky a na nich založenej matematiky proti intucionistickému útoku.
- Cieľom je vypracovať taký axiomatický systém teórie množín, ktorý by umožnil zachytiť “celú” matematiku, a dokázať jeho *bezospornosť* a *úplnosť* prísne *finitnými* metódami, t.j. prostriedkami, ktoré by museli akceptovať aj intuicionisti.
- Je nádej, že Zermelov-Fraenkelov axiomatický systém ZF, prípadne doplnený axiómou výberu a ďalšími vhodnými axiómami, už taký je.

Bezospornosť

- Bezospornosť (konzistencia) teórie T znamená:
Žiadne tvrdenie A teórie T nie je v T dokázateľné zároveň so svojou negáciou $\neg A$.
- V Russellových a Whiteheadových *Principia Mathematica* ani v Zermelovom-Frankelovom axiomatickom systéme ZF sa nedajú zreprodukovať spory založené na známych paradoxoch.
- To však nestačí – treba podať *dôkaz bezospornosti*, t. j. dokázať, že v príslušnom axiomatickom systéme sa nemôžu vyskytnúť vôbec žiadne spory.

Ako to možno urobiť?

- Pre niektoré teórie stačí zadať konečný model.
- Pre teórie ašpirujúce na úlohu *základov matematiky* to však neprichádza do úvahy.
- Musíme sa preto bližšie pozrieť na samotné dôkazy.
- Predmetom klasickej matematiky sú čísla, funkcie, geometrické útvary, vektorové polia, atď., a vzťahy medzi nimi, ako napr. algebraické či diferenciálne rovnice, geometrické konfigurácie a pod. – nie však dôkazy.
- Dôkazy sú vyjadrenia myšlienkových procesov, ktorými ustanovujeme niektoré tvrdenia či vzťahy ako logicky nevyhnutné dôsledky iných (väčšinou základnejších alebo evidentnejších) tvrdení či vzťahov.

Formalizácia

- Matematické teórie možno (niektoré viac, iné menej prirodzene) zapísať v symbolickom jazyku (Peano, Frege).
- Zápisy tvrdení a vzťahov – *formuly* – sú potom “len” postupnosti znakov utvorené podľa istých kombinatorických pravidiel.
- Formálne dôkazy možno zapísať ako postupnosti formúl vyhovujúce istým mechanicky overiteľným podmienkam.
- *Teória dôkazov* alebo *metamatematika* je už *matematická teória* zaoberajúca sa *formálnymi* dôkazmi.
- Bezospornosť formálnej teórie T znamená:
Neexistujú dva dôkazy v T , z ktorých jeden by končil nejakou formulou A a druhý jej negáciou $\neg A$.

Dokázať bezospornosť nejakej formálnej teórie je konečne dobre definovaná matematická úloha

Úplnosť

- Úplnosť teórie T znamená:
Pre ľubovoľné tvrdenie A teórie T je v nej dokázateľné práve jedno z tvrdení $A, \neg A$.
- Pre formálnu teóriu T je to opäť dobre definovaná metamatematická úloha.
- Pre matematiku formulovanú v rámci nejakého *úplného* axiomatického systému jej základov by zákon vylúčeného tretieho platil aj v intuicionistickom zmysle.

Požiadavka finitnosti...

- Intuicionistov treba poraziť ich vlastnými zbraňami!
- Preto dôkazy bezospornosti a úplnosti základnej matematickej teórie (ako aj všetky prostriedky používané v metamatematike) musia spĺňať požiadavku *finitnosti*:
 - ★ Nesmú používať nekonečné množiny, zákon vylúčeného tretieho, axiómu výberu, neefektívne existenčné dôkazy, atď., teda prostriedky, ktorých oprávnenosť majú zaručiť.
- Finitistické stanovisko (Hilbert, Herbrand) upresňuje a *sprísňuje* intuicionistickú požiadavku konštruktívnosti.

... a jej dôsledky

- Finitný a konštruktívny dôkaz úplnosti si *de facto* vyžaduje vypracovanie univerzálnej rozhodovacej procedúry (algoritmu), čiže zahŕňa v sebe aj dôkaz *rozhodnuteľnosti* príslušnej axiomatickej teórie, ktorá by mala zohrať úlohu základov matematiky.
- Sám Hilbert je pevne presvedčený o riešiteľnosti (rozhodnuteľnosti) každého dostatočne jasne sformulovaného matematického problému.
- Dodatočnou požiadavkou je dôkaz *konzervatívnosti* neefektívnych infinitných metód:
 - ★ Všetko, čo možno dokázať s ich použitím, možno dokázať aj bez nich, len za cenu dlhších a zložitejších dôkazov.
- Tým by definitívne padol dôvod zakazovať si ich používať:
 - ★ Šlo by o zatvrdilé spiatočníctvo, z iracionálnych dôvodov odmietajúce používať nové, účinnejšie nástroje množinovej matematiky.

Gödelova veta o úplnosti (1929–30)

- Gödel pracuje v intenciách Hilbertovho programu.
- Vo svojej dizertácii dokazuje *vetu o úplnosti predikátového počtu (logiky prvého rádu)*:

Každá bezosporná teória prvého rádu má model.

- Logické (nevyhnutné) dôsledky axióm teórie prvého rádu sú práve tie tvrdenia jej jazyka, ktoré z nich možno odvodiť formálnymi dôkazmi.
- Zavŕšenie vnorenia matematického uvažovania (matematickej logiky) do matematiky.
- Prémia navyše – *veta o kompaktnosti*:

*Ak má model každý konečný systém axióm nejakej teórie T ,
tak aj T ako celok má model.*

Silný prostriedok umožňujúci konštrukcie modelov teórií prvého rádu tak povediac “z ničoho”.

- Chybička krásy:
Dôkaz vety o úplnosti nespĺňa požiadavku finitnosti (ani nemôže).

Technické prepoklady Gödelových viet o neúplnosti

- Prechod od *formalizácie* k *aritmetizácii* dokázateľnosti.
- Priradenie číselných kódov znakom aj výrazom (t.j. konečným postupnostiam znakov) daného formálneho jazyka.
- Vyjadrenie vlastností výrazov jazyka
 - ★ “*byť formulou*”,
 - ★ “*byť axiomou určitej teórie*”,
 - ★ “*byť kódom dôkazu v istej teórii*” a pod.
aritmetickými vlastnosťami ich kódov.
- Presne v duchu Leibnizovho projektu
 - ★ *characteristica universalis*,
 - ★ *calculus ratiocinator* a
 - ★ *ars iudicandi*.

Na koho-čo sa vzťahujú Gödelove vety o neúplnosti?

Na ľubovoľnú teóriu prvého rádu T takú, že

- T je rekurzívne axiomatizovateľná, t. j. jej axiomy tvoria konečný zoznam alebo sa dajú aspoň algoritmicky rozpoznať;
- v rámci T možno interpretovať *Peanovu aritmetiku* (PA), t. j. základnú teóriu sčítania a násobenia prirodzených čísel.

Axiómy PA

$$\begin{aligned}0 + 1 &= 1, & 0 &\neq x + 1, & x + 1 &= y + 1 \Rightarrow x = y; \\x + 0 &= x, & x + (y + 1) &= (x + y) + 1; \\x \cdot 0 &= 0, & x \cdot (y + 1) &= (x \cdot y) + x.\end{aligned}$$

Schéma matematickej indukcie:

$$\left[F(0) \wedge (\forall x)(F(x) \Rightarrow F(x + 1)) \right] \Rightarrow (\forall x)F(x),$$

kde $F(x)$ je ľubovoľná formula v jazyku PA.

Pomocou Gödelovho kódovania je možné...

- ... zoradiť formuly s nanajvýš jednou voľnou premennou x vyjadrujúce vlastnosti prirodzených čísel do postupnosti $F_0(x), F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x), \dots$;
- ... zoradiť dôkazy v teórii T do postupnosti $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k, \dots$;
- ... definovať v T aritmetickú efektívne rozhodnuteľnú reláciu $P(x, y, z)$ takú, že pre ľubovoľné prirodzené čísla k, m, n je splnená nasledujúca podmienka:

Δ_k je dôkaz tvrdenia $F_n(m)$ v teórii T
práve vtedy, keď platí $P(m, n, k)$.

Gödelov posun Epimenidovho paradoxu

- Nech g je číslo formuly $\neg(\exists z)P(x, x, z)$;
potom $F_g(g)$ je formula $\neg(\exists z)P(g, g, z)$.
- Tvrdenie $F_g(g)$ je “iba” aritmetické tvrdenie o prirodzených číslach, podobne ako napr.
“Rovnica $x^3 + y^3 + z^3 = 33$ nemá riešenie v kladných celých číslach.”
- Na druhej strane však kóduje tvrdenie:
“V teórii T neexistuje dôkaz tvrdenia $F_g(g)$.”
- Gödelovo tvrdenie $F_g(g)$ tak vypovedá samo o sebe:
“Toto tvrdenie je nedokázateľné v T .”

Alebo:

“Som nedokázateľné v T .”

Gödelovo tvrdenie je nevyhnutne pravdivé,...

... presnejšie, je to tak, ak T je *aritmeticky korektná*, t.j. všetky v nej dokázateľné tvrdenia o prirodzených číslach sú pravdivé.

- Keby totiž bolo nepravdivé, tak by bolo dokázateľné v T .
- Teda $F_g(g)$ by bolo v T dokázateľné tvrdenie o prirodzených číslach.
- Ale všetky aritmetické tvrdenia dokázateľné v T sú pravdivé.
- To je spor s predpokladom, z ktorého sme vyšli, že toto tvrdenie je nepravdivé.
- Teda Gödelovo tvrdenie $F_g(g)$ je zároveň pravdivé a nedokázateľné.

Predbežná verzia prvej Gödelovej vety o neúplnosti

Každá rekurzívne axiomatizovateľná, aritmeticky korektná teória prvého rádu, zahŕňajúca Peanovu aritmetiku, umožňuje sformulovať pravdivé no nedokázateľné tvrdenia o prirodzených číslach.

Príkladom je práve Gödelovo tvrdenie $F_g(g)$.

Námietka:

- Práve sme *dokázali*, že Gödelovo tvrdenie je pravdivé.
- Teda je dokázateľné a zároveň je pravda, čo hovorí, teda je nedokázateľné.
- Takže opäť sme dostali spor, veľmi podobný Russellovmu paradoxu.

Odpoveď:

- Tentokrát nejde o spor v rámci formálneho systému teórie T .
- Náš “dôkaz” pravdivosti Gödelovho tvrdenia nie je totiž dôkazom v teórii T , ale len neformálnym zdôvodnením pravdivosti Gödelovho tvrdenia.

Prvá Gödelova veta o neúplnosti

Nech T je ľubovoľná rekurzívne axiomatizovateľná teória prvého rádu zahŕňajúca Peanovu aritmetiku.

- (a) *Ak T je bezosporná (konzistentná), tak Gödelovo tvrdenie $F_g(g)$ nie je dokázateľné v T .*
- (b) *Ak T je navyše ω -konzistentná, tak ani jeho negácia $\neg F_g(g)$ nie je dokázateľná v teórii T .*

Preto v tom prípade T je neúplná.

- ω -konzistencia je technická požiadavka, o niečo silnejšia ako púha bezospornosť.
- Rosser (1936) ukázal, že sa možno sa zaobiť aj bez nej.
 - ★ Zostrojil príklad takej uzavretej formuly B , že už len z predpokladu bezospornosti teórie T vyplýva nedokázateľnosť oboch formúl B aj $\neg B$ v T .
 - ★ Rosserova formula kóduje tvrdenie, ktoré vypovedá o sebe samom:
 - ★ “Ak ma možno dokázať, tak medzi dôkazmi, ktoré sa nachádzajú ešte pred mojim prvým dôkazom v uvedenej postupnosti $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots$, možno nájsť dôkaz mojej negácie.”

Nedokázateľnosť bezspornosti

- Ak s je číslo formuly $x \neq x$, tak $F_s(0)$ je uzavretá formula $0 \neq 0$.
- Zrejme teória T je bezsporná práve vtedy, keď formula $F_s(0)$, t. j. $0 \neq 0$, nie je dokázateľná v T .
- Tvrdenie o bezspornosti (konzistentnosti) teórie T je teda zakódované v aritmetickej formule

$$\neg(\exists z)P(0, s, z)$$

ktorú značíme $\text{Cons}(T)$.

- V teórii T je dokázateľná implikácia $\text{Cons}(T) \Rightarrow F_g(g)$.
- Keby v teórii T bolo dokázateľné tvrdenie $\text{Cons}(T)$, bolo by v T dokázateľné aj Gödelovo tvrdenie $F_g(g)$, čo protirečí prvej Gödelovej vete o neúplnosti.

Druhá Gödelova veta o neúplnosti

Ak je T bezosporná, rekurzívne axiomatizovateľná teória zahrňajúca Peanovu aritmetiku, tak formula $\text{Cons}(T)$, ktorá kóduje tvrdenie o bezospornosti teórie T , v nej nie je dokázateľná.

- Tvrdenie $\text{Cons}(T)$ je tak (popri Gödelovom tvrdení $F_g(g)$) ďalším príkladom pravdivého aritmetického tvrdenia nedokázateľného v T .
- V ZF, ale aj v slabších teóriách, možno dokázať bezospornosť PA.
 - ★ Gentzenov dôkaz bezospornosti PA *transfinitnou indukciou* cez ordinály $< \varepsilon_0 = \omega^{\omega^{\omega^{\dots}}}$ (1936);
 - ★ Gödelov dôkaz pomocou *rekurzívnych funkcionálov* (1958).
- Infinitné metódy teórie množín nie sú *konzervatívnym* rozšírením finitných metód. (Tie totiž možno formalizovať v PA.)

Nadväzujúce výsledky z r. 1936

Tarského veta o nedefinovateľnosti pravdy

(presnejšie, relácie splňania)

Neexistuje formula $S(x, y)$ v jazyku teórie T taká, aby pre ľubovoľné prirodzené čísla m, n platilo $S(m, n)$ práve vtedy, keď $F_n(m)$.

Churchova-Turingova veta o nerozhodnuteľnosti predikátového počtu a PA

Predikátový počet, Peanova aritmetika, rovnako ako každá rekurzívne axiomatizovateľná teória T , v ktorej možno interpretovať Peanovu aritmetiku, sú algoritmicky nerozhodnuteľné.

Zlyhanie Hilbertovho programu?

Spomínané výsledky ukazujú nemožnosť naplnenia Hilbertovho programu vo všetkých bodoch.

- Bolo by však omylom z toho vyvodzovať, že Hilbertov program bol len akýmsi naivným rojčením, ktorému Gödel uštedril zaslúženú príučku.
- Práve naopak, Hilbert nastolil zásadné otázky a v danej chvíli mal dobré dôvody očakávať na ne také odpovede, aké predjímal.
- Nebyť takto vyostrene sformulovaných otázok, zrejme by sme sa tak skoro nedozvedeli ani prekvapivé odpovede.
- Jeho program viedol ku vzniku *metamatematiky* alebo *teórie dôkazov* ako nového a plodného odvetvia matematiky, ktoré významne ovplyvnilo vývoj viacerých oblastí kybernetiky a informatiky (*teória formálnych jazykov, rekurzívne funkcie a teória vypočítateľnosti, analýza programov, automatické dokazovanie teorém...*).

Sú aritmetika či teória množín sporné?

- Z Gödelových viet nevyplýva, že by napr. bezospornosť Peanovej aritmetiky nebolo možné dokázať – len to nie je možné urobiť v rámci nej samotnej.
- Gentzen (1936) napr. dokázal bezospornosť PA transfinitnou indukciou cez ordinálne čísla menšie než spočítateľný ordinál $\varepsilon_0 = \omega^{\omega^{\dots}}$.
- A už toľto neznamena, že by aritmetika či nebodaj matematika ako celok bola sporná.
- Na druhej strane, existenciu sporu v nejakom rozšírení teórie množín napr. o veľmi silné axiomy existencie *velkých kardinálov* nemožno *a priori* celkom vylúčiť.
- Ešte problematickejšie však môžu vyznieť pokusy vyvodiť z Gödelových viet nejaké príliš ďalekosiahle dôsledky mimomatematického charakteru.