MATEMATICKÁ LOGIKA

Pavol Zlatoš

MATEMATICKÁ LOGIKA I

Výrokový a predikátový počet

Sylabus prednášok v zimnom semestri

0. Vymedzenie logiky v sústave vied a predmet logiky

- Logika je normatívna veda, ktorá skúma formu, štruktúru a zákony správneho (t. j. logického) myslenia a usudzovania, tak ako sa prejavujú v jazyku – či už hovorenom alebo písanom, abstrahujúc pritom od obsahu konkrétnych myšlienok a súdov.
- Vznik logiky v antickom Grécku – spoločenské podmienky: demokracia, právny systém, obchod, rétorika
- Sofisti, Sokratove dialógy, Platón, Aristoteles (Organon)
- Vývoj v stredoveku a novoveku (teológia, Leibniz, Boole, de Morgan, Bolzano, Frege, Pierce, 20. storočie)
- Matematická logika (matematické metódy + analýza jazyka a deduktívnej výstavby matematických teórií)

1. Výrokový počet (Logika nultého rádu)

1.1. Syntax a sémantika výrokového počtu

- Jazyk logiky nultého rádu
- Výroky a výrokové formy
- Interpretácie (pravdivostné ohodnotenia)
- Tautológie, splniteľné, vyvrátiteľné a nesplniteľné formy
- Teórie vo výrokovom počte, logický dôsledok (platnosť v teórii)
- Axiómy výrokového počtu, modus ponens
- Pojem dôkazu, dokázateľnosť

1.2. Problém korektnosti a úplnosti vo výrokovom počte

- Veta o korektnosti a kritika jej dôkazu
- Prvá formulácia vety o úplnosti
- Dokázateľnosť niektorých tautológií
- Veta o dedukcii, sporné a bezosporné teórie, veta o spore
- Postova veta – dokázateľnosť všetkých tautológií

1.3. Dôkaz vety o úplnosti

- Druhá formulácia vety o úplnosti a jej vzťah k prvej
- Úplné teórie (úplnosť = maximálna beozospornosť)
- Interpretovateľnosť úplných teórií
- Zúplnenia bezospornej teórie
- Dokončenie dôkazu vety o úplnosti
- Veta o kompaktnosti

2. Logika prvého rádu (Predikátový počet)

2.1. Syntax a sémantika logiky prvého rádu

- Jazyky a štruktúry prvého rádu
- Termy a formuly
- Voľné a viazané výskyty premenných
- Interpretácia termov a spĺňanie formúl
- Teórie prvého rádu, modely teórií
- Príklady teórií a ich modelov
  - (čiastočne) usporiadané množiny, zväzy, Booleove algebry
  - tri formulácie teórie grúp
  - (komutatívne) okruhy (s jednotkou), obory integrity, usporiadané okruhy
  - telesá, polia, polia danej charakteristiky, algebraicky a reálne uzavreté polia, usporiadané okruhy a polia
  - (unitárne) moduly nad daným okruhom (s jednotkou), vektorové priestory nad daným poľom
  - Peanova aritmetika PA
  - axiomatické systémy teórie množín ZF a ZFC
- Logický dôsledok (platnosť v teórii)
- Logické axiómy a odvodzovacie pravidlá
  - axiómy výrokového počtu – tautológie
  - prípustnosť substitúcie termu do formuly
  - axiómy kvantifikátorov
  - axiómy rovnosti
  - modus ponens a pravidlo zovšeobecnenia
- Pojem dôkazu a dokázateľnosť

2.2. Problém korektnosti a úplnosti v logike prvého rádu

- Veta o korektnosti a kritika jej dôkazu
- Formulácia vety o úplnosti
- Veta o dedukcii, sporné a bezosporné teórie, veta o spore
- Gödelova formulácia vety o úplnosti a jej vzťah k prvej formulácii
- Naivný pokus o dôkaz, analýza dôvodov zlyhania
- Úplné teórie (úplnosť = maximálna bezospornosť)

- Henkinovské teórie
- Existencia modelov úplných henkinovských teórií
- Rozšírenia jazyka a zúženia štruktúr
- Úplné henkinovské rozšírenia bezosporných teórií
- Dokončenie dôkazu vety o úplnosti
- Vzťah mohutností jazyka a modelu teórie zostrojeného v dôkazu
- Skolemov paradox
- Veta o kompaktnosti
- Aplikácie vety o kompaktnosti
  - neaxiomatizovateľnosť tried štruktúr s niektorými vlastnosťami konečnosti
  - neštandardné modely aritmetiky
  - neštandardná analýza

2.3. Gödelove vety o neúplnosti

- Prirodzené čísla a Peanova aritmetika
- Otázky bezospornosti a úplnosti
- Pravdivosť a dokázateľnosť
- Kódovanie postupností
- Aritmetizácia dokázateľnosti
- Epimenidov paradox (paradox klamára) a jeho posun
- Prvá Gödelova veta o neúplnosti – neúplnosť PA
- Druhá Gödelova veta o neúplnosti – nedokázateľnosť bezospornosti PA
- Filozofické dôsledky

MATEMATICKÁ LOGIKA II

Úvod do teórie modelov

Sylabus prednášok v letnom semestri

1. Podštruktúry a homomorfizmy

- Podštruktúry a rozšírenia (nadštruktúry) danej štruktúry prvého rádu
  - dva prístupy a ich rovnocennosť
  - príklad grúp – závislosť na jazyku
- Homomorfizmy štruktúr
  - príklad grúp – nezávislosť na jazyku
- Obraz a vzor podštruktúry pri homomorfizme
- Vnorenia a izomorfizmy
  - porovnanie algebier a relačných štruktúr
  - príklady homomorfizmov a izomorfizmov (čiastočne) usporiadaných množín
- univerzálne, existenčné a pozitívne formuly
- Zachovávanie univerzálnych vlastností podštruktúrami
- Zachovávanie existenčných vlastností nadštruktúrami
- Zachovávanie pozitívnych vlastností homomorfnými obrazmi
- Nevyjadriteľnosť niektorých vlastností formulami určitého syntaktického tvaru

2. Elementárna ekvivalencia a elementárne podštruktúry

- Elementárna ekvivalencia štruktúr
- Teória štruktúry a jej vzťah k elementárnej ekvivalencii
- Elementárne podštruktúry a elementárne rozšírenia
- Elementárne vnorenia
- Vzťahy medzi elementárnou ekvivalenciou a elementárnymi podštruktúrami
- Príklady elementárnych a neelementárnych podštruktúr
- Tarského kritérium
- Existencia a mohutnosti elementárnych podštruktúr a elementárnych rozšírení
  - Vety Löwenheima-Skolema-Tarského

3. Diagramy štruktúr

- Incidenčné tabuľky unárnych a binárnych relácií
- Multiplikatívne tabuľky unárnych a binárnych operácií
- Rozšírenie jazyka o mená prvkov štruktúry
- Pozitívny atomický diagram štruktúry a jeho vzťah k homomorfizmom
- Atomický diagram štruktúry a jeho vzťah k podštruktúram a vnoreniam
- Elementárny diagram štruktúry a jeho vzťah k elementárnym podštruktúram

4. Vety o zachovávaní

- Axiomatické a konečne axiomatizovateľné triedy
- Veta o vzájomnej neprotirečivosti
- Axiomatizačná lema

- Univerzálne teórie a zachovávanie vlastností podštruktúrami
- Existenčné teórie a zachovávanie vlastností nadštruktúrami
- Reťazce štruktúr, zjednotenia reťazcov
- Algebraický uzáver poľa
- Elementárne reťazce
- Univerzálno-existenčné teórie a zachovávanie vlastností pri zjednoteniach reťazcov
- Univerzálno-existenčná axiomatizácia teórie grúp
- Pozitívne teórie a zachovávanie vlastností homomorfnými obrazmi

5. Konštrukcia ultraproduktu

- Priamy súčin štruktúr, priama mocnina
- Booleovská pravdivostná hodnota formuly
- Vlastnosti logických spojok a kvantifikátorov
- Filtrovaný (redukovaný) súčin štruktúr, filtrovaná (redukovaná) mocnina
- Ultraprodukt štruktúr, ultramocnina
- Łosova veta
- Ultramocnina poľa reálnych čísel, neštandardná analýza
- Nekonečne malé a nekonečne veľké hyperreálne čísla
- Neštandardná formulácia spojitosti, derivácie a určitého integrálu funkcie
- Veta o kompaktnosti v jazyku ultraproduktov
- Elementárna ekvivalencia a ultramocniny
- Charakterizácia axiomatických tried
- Charakterizácia konečne axiomatizovateľných tried

Literatúra

B. Balcar, P. Štěpánek, *Teorie množin.*

L. Bukovský, *Množiny a všeličo okolo nich.*

C. C. Chang, H. J. Keisler, *Model Theory*, (RP).

H. B. Enderton, *A Mathematical Introduction to Logic.*

J. Kolář, O. Štěpánková, M. Chytil, *Logika, algebry a grafy.*

E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, (RP).

J. Shoenfield, *Mathematical Logic*, (RP).

A. Sochor, *Klasická matematická logika.*

A. Sochor, *Logika pro všechny ochotné myslet.*

P. Štěpánek, *Matematická logika.*

V. Švejdar, *Logika – neúplnost, složitost, nutnost.*

P. Zlatoš, *Ani matematika si nemôže byť istá sama sebou. Úvahy o množinách, nekonečne, paradoxoch a Gödelových vetách.*

P. Zlatoš, *O dobrom usporiadaní a axióme výberu*, Obzory matematiky, fyziky a informatiky 58/1999, 1–9; 1/2000 (29), 14–24.