

MATEMATICKÁ LOGIKA

PAVOL ZLATOŠ

MATEMATICKÁ LOGIKA I

Výrokový a predikátový počet

Sylabus prednášok v zimnom semestri

0. Vymedzenie logiky v sústave vied a predmet logiky

- Logika je normatívna veda, ktorá skúma formu, štruktúru a zákony správneho (t. j. logického) myslenia a usudzovania, tak ako sa prejavujú v jazyku – či už hovorenom alebo písanom, abstrahujúc pritom od obsahu konkrétnych myšlienok a súdov.
- Vznik logiky v antickom Grécku – spoločenské podmienky: demokracia, právny systém, obchod, rétorika
- Sofisti, Sokratove dialógy, Platón, Aristoteles (Organon)
- Vývoj v stredoveku a novoveku (teológia, Leibniz, Boole, de Morgan, Bolzano, Pierce, 20. storočie)
- Matematická logika (matematické metódy + analýza jazyka a deduktívnej výstavby matematických teórií)

1. Výrokový počet (Logika nultého rádu)

1.1. Syntax a sémantika výrokového počtu

- Jazyk logiky nultého rádu
- Výroky a výrokové formy
- Interpretácie (pravdivostné ohodnotenia)
- Tautológie, splniteľné, vyvrátiteľné a nespľniteľné formy
- Teórie vo výrokovom počte, logický dôsledok (platnosť v teórii)
- Axiómy výrokového počtu, modus ponens
- Pojem dôkazu, dokázateľnosť

1.2. Problém korektnosti a úplnosti vo výrokovom počte

- Veta o korektnosti a kritika jej dôkazu
- Prvá formulácia vety o úplnosti
- Dokázateľnosť niektorých tautológií
- Veta o dedukcii, sporné a bezsporné teórie, veta o spore
- Postova veta – dokázateľnosť všetkých tautológií

1.3. Dôkaz vety o úplnosti

- Druhá formulácia vety o úplnosti a jej vzťah k prvej
- Úplné teórie (úplnosť = maximálna bezospornosť)
- Interpretovateľnosť úplných teórií
- Zúplnenia bezospornej teórie
- Dokončenie dôkazu vety o úplnosti
- Veta o kompaktnosti

1.4. Booleove algebry

- Axiómy Booleových algebier
- Základné príklady
- Zväzová štruktúra Booleových algebier
- Podalgebry a homomorfizmy
- Príklad nekonečnej spočítateľnej Booleovej algebry

1.5. Filtre v Booleových algebrách

- Ideály, filtre a kongruencie
- Faktorové Booleove algebry
- Ultrafiltre
- Atomické a bezatomické Booleove algebry
- Stoneova veta o reprezentácii

1.6. Booleove algebry a výrokový počet

- Filtre a teórie
- Lindenbaumova algebra teórie
- Charakterizácia (bezo)spornosti a úplnosti pomocou filtrov resp. Lindenbaumových algebier
- Mohutnosti a (bez)atomickosť niektorých Lindenbaumových algebier

2. Logika prvého rádu (Predikátový počet)

2.1. Syntax a sémantika logiky prvého rádu

- Jazyky a štruktúry prvého rádu
- Termy a formuly
- Voľné a viazané výskyty premenných
- Interpretácia termov a spĺňanie formúl
- Teórie prvého rádu, modely teórií
- Príklady teórií a ich modelov
 - (čiastočne) usporiadané množiny, zväzy, Booleove algebry
 - tri formulácie teórie grúp
 - (komutatívne) okruhy (s jednotkou), obory integrity, usporiadané okruhy
 - telesá, polia, polia danej charakteristiky, algebraicky a reálne uzavreté polia, usporiadané okruhy a polia
 - (unitárne) moduly nad daným okruhom (s jednotkou), vektorové priestory nad daným poľom
 - Peanova aritmetika PA
 - axiomatické systémy teórie množín ZF a ZFC
- Logický dôsledok (platnosť v teórii)
- Logické axiómy a odvodzovacie pravidlá
 - axiómy výrokového počtu – tautológie
 - prípustnosť substitúcie termu do formuly
 - axiómy kvantifikátorov
 - axiómy rovnosti
 - modus ponens a pravidlo zovšeobecnenia
- Pojem dôkazu a dokázateľnosť

2.2. Problém korektnosti a úplnosti v logike prvého rádu

- Veta o korektnosti a kritika jej dôkazu
- Formulácia vety o úplnosti
- Veta o dedukcii, sporné a bezosporné teórie, veta o spore
- Gödelova formulácia vety o úplnosti a jej vzťah k prvej formulácii
- Naivný pokus o dôkaz, analýza dôvodov zlyhania
- Úplné teórie (úplnosť = maximálna bezospornosť)
- Henkinovské teórie
- Existencia modelov úplných henkinovských teórií
- Rozšírenia jazyka a zúženia štruktúr
- Úplné henkinovské rozšírenia bezosporných teórií
- Dokončenie dôkazu vety o úplnosti
- Vzťah mohutností jazyka a modelu teórie zostrojeného v dôkazu
- Skolemov paradox
- Veta o kompaktnosti
- Aplikácie vety o kompaktnosti
 - neaxiomatizovateľnosť tried štruktúr s niektorými vlastnosťami konečnosti
 - neštandardné modely aritmetiky
 - neštandardná analýza

MATEMATICKÁ LOGIKA II

Úvod do teórie modelov

Sylabus prednášok v letnom semestri

1. Podštruktúry a homomorfizmy

- Podštruktúry a rozšírenia (nadštruktúry) danej štruktúry prvého rádu
 - dva prístupy a ich rovnocennosť
 - príklad grúp – závislosť na jazyku
- Homomorfizmy štruktúr
 - príklad grúp – nezávislosť na jazyku
- Obraz a vzor podštruktúry pri homomorfizme
- Vnorenia a izomorfizmy
 - porovnanie algebier a relačných štruktúr
 - príklady homomorfizmov a izomorfizmov (čiastočne) usporiadaných množín
- univerzálne, existenčné a pozitívne formuly
- Zachovávanie univerzálnych vlastností podštruktúrami
- Zachovávanie existenčných vlastností nadštruktúrami
- Zachovávanie pozitívnych vlastností homomorfnými obrazmi
- Nevyjadriteľnosť niektorých vlastností formulami určitého syntaktického tvaru

2. Elementárna ekvivalencia a elementárne podštruktúry

- Elementárna ekvivalencia štruktúr
- Teória štruktúry a jej vzťah k elementárnej ekvivalencii
- Elementárne podštruktúry a elementárne rozšírenia
- Elementárne vnorenia
- Vzťahy medzi elementárnou ekvivalenciou a elementárnymi podštruktúrami
- Príklady elementárnych a neelementárnych podštruktúr
- Tarského kritérium
- Existencia a mohutnosti elementárnych podštruktúr a elementárnych rozšírení
 - vety Löwenheima-Skolema-Tarského

3. Diagramy štruktúr

- Incidenčné tabuľky unárnych a binárnych relácií
- Multiplikatívne tabuľky unárnych a binárnych operácií
- Rozšírenie jazyka o mená prvkov štruktúry
- Pozitívny atomický diagram štruktúry a jeho vzťah k homomorfizmom
- Atomický diagram štruktúry a jeho vzťah k podštruktúram a vnoreniam
- Elementárny diagram štruktúry a jeho vzťah k elementárnym podštruktúram a vnoreniam

4. Vety o zachovávaní

- Axiomatické a konečne axiomatizovateľné triedy
- Veta o vzájomnej neprotirečivosti
- Axiomatizačná lema
- Univerzálne teórie a zachovávanie vlastností podštruktúrami
- Existenčné teórie a zachovávanie vlastností nadštruktúrami
- Reťazce štruktúr, zjednotenia reťazcov
- Algebraický uzáver poľa
- Elementárne reťazce
- Univerzálno-existenčné teórie a zachovávanie vlastností pri zjednoteniach reťazcov
- Univerzálno-existenčná axiomatizácia teórie grúp
- Pozitívne teórie a zachovávanie vlastností homomorfnými obrazmi

5. Konštrukcia ultraprojektu

- Priamy súčin štruktúr, priama mocnina
- Booleovská pravdivostná hodnota formuly
- Vlastnosti logických spojok a kvantifikátorov
- Filtrovaný (redukovaný) súčin štruktúr, filtrovaná (redukovaná) mocnina
- Ultraprojekt štruktúr, ultramocnina
- Losova veta
- Ultramocnina poľa reálnych čísel, neštandardná analýza
- Nekonečne malé a nekonečne veľké hyperreálne čísla
- Neštandardná formulácia spojitosti, derivácie a určitého integrálu funkcie
- Veta o kompaktnosti v jazyku ultraprojektov
- Elementárna ekvivalencia a ultramocniny
- Charakterizácia axiomatických tried
- Charakterizácia konečne axiomatizovateľných tried

LITERATÚRA

- B. Balcar, P. Štěpánek, *Teorie množin*.
- L. Bukovský, *Množiny a všeličo okolo nich*.
- C. C. Chang, H. J. Keisler, *Model Theory*, (RP).
- H. B. Enderton, *A Mathematical Introduction to Logic*.
- J. Kolář, O. Štěpánková, M. Chytil, *Logika, algebry a grafy*.
- E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, (RP).
- J. Shoenfield, *Mathematical Logic*, (RP).
- A. Sochor, *Klasická matematická logika*.
- P. Štěpánek, *Matematická logika*.
- V. Švejdar, *Logika – neúplnosť, složitost, nutnosť*.
- P. Zlatoš, *Ani matematika si nemôže byť istá sama sebou. Úvahy o množinách, nekonečne, paradoxoch a Gödelových vetách*.