1 PODŠTRUKTÚRY A HOMOMORFIZMY

V celom nasledujúcom texte $L = (F, R, \nu)$ označuje nejaký pevne zvolený, no inak ľubovoľný jazyk prvého rádu, pričom jeho konštanté symboly chápame ako nulárne funkcionálne symboly. Pokiaľ nebude hroziť nedorozumenie alebo výslovne nepovieme inak, tak pod pojmom „štruktúra“, prípadne „štruktúra prvého rádu“, budeme rozumieť štruktúru jazyka L a „teóriou“ resp. „teóriou prvého rádu“ budeme rozumieť teóriu v jazyku L. Podobne budeme pod slovami ako „term“ alebo „formula“ rozumieť term resp. formulu jazyka L.

1.1 Podštruktúry

Nech $\mathcal{A} = (A; \dots)$, $\mathcal{B} = (B; \dots)$ sú dve štruktúry prvého rádu. Hovoríme, že štruktúra $\mathcal{B}$ je *podštruktúrou* štruktúry $\mathcal{A}$, označenie $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, ak $B \subseteq A$ a pre ľubovoľný n-árny funkcionálny symbol $f \in F$ resp. relačný symbol $r \in R$ a všetky $b_1, \dots, b_n \in B$ platí

$$f^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n) = f^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_n)$$
$$(b_1, \dots, b_n) \in r^{\mathcal{B}} \;\Leftrightarrow\; (b_1, \dots, b_n) \in r^{\mathcal{A}}$$

Inak povedané, $f^{\mathcal{B}} = f^{\mathcal{A}} \restriction B^n$ a $r^{\mathcal{B}} = r^{\mathcal{A}} \cap B^n$. Špeciálne pre konštantný symbol $f \in F$ to znamená, že $f^{\mathcal{B}} = f^{\mathcal{A}}$. Hovoríme tiež, že štruktúra $\mathcal{A}$ je *nadštruktúrou* alebo *rozšírením* štruktúry $\mathcal{B}$ a píšeme $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}$.

Vzťah „byť podštruktúrou“ je zrejme tranzitívny, čiže pre ľubovoľné štruktúry $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ platí

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \,\wedge\, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C} \;\Rightarrow\; \mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$$

Základná množina B podštruktúry $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ musí byť uzavretá vzhľadom na všetky operácie v nadštruktúre $\mathcal{A}$. Teda pre každý n-árny funkcionálny symbol $f \in F$ a všetky $b_1, \dots, b_n \in B$ platí $f^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_n) \in B$. Špeciálne, $f^{\mathcal{A}} \in B$ pre každý konštantný symbol $f \in F$.

Naopak, každá neprázdna podmnožina $M \subseteq A$ základnej množiny štruktúry $\mathcal{A}$, ktorá je uzavretá vzhľadom na všetky operácie štruktúry $\mathcal{A}$, už jednoznačne určuje podštruktúru $\mathcal{M} = (M; \dots)$ štruktúry $\mathcal{A}$ s nosičom M. Operácie a relácie v $\mathcal{M}$ sú potom korektne definované jediným možným spôsobom:

$$f^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{A}} \restriction M^n$$
$$r^{\mathcal{M}} = r^{\mathcal{A}} \cap M^n$$

pre každý n-árny operačný resp. relačný symbol $f \in F$, $r \in R$. Uvedené rovnosti vyjadrujeme slovným obratom, že operácie a relácie štruktúry $\mathcal{M}$ sú *zdedené* zo štruktúry $\mathcal{A}$.

Toto pozorovanie nám poskytuje istú voľnosť vo vyjadrovaní: pod pojmom podštruktúry štruktúry $\mathcal{A}$ môžeme podľa okolností rozumieť niekedy štruktúru $\mathcal{M}$ takú, že $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$, inokedy zas neprázdnu podmnožinu $M \subseteq A$ uzavretú vzhľadom na operácie v $\mathcal{A}$ (príslušná štruktúra $\mathcal{M} = (M; \dots)$ má potom operácie a relácie zdedené z $\mathcal{A}$).

1.1.1 Príklad. Vektorové priestory nad daným poľom F možno chápať ako štruktúry $\big(V; F \cup \{+\}\big)$ jazyka prvého rádu s binárnou operáciou sčítania $+$, unárnymi operáciami násobenia skalármi $f \in F$ a bez relačných symbolov. Potom podštruktúry vektorového priestoru $\big(V; F \cup \{+\}\big)$ sú práve všetky jeho lineárne podpriestory.

1.1.2 Úloha. Nech $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sú štruktúry prvého rádu, pričom $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, $t(x_1, \dots, x_n)$ je term a $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ je atomická formula. Potom pre všetky $b_1, \dots, b_n \in B$ platí

$$t^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_n) \in B$$
$$\mathcal{B} \vDash \varphi(b_1, \dots, b_n) \;\;\Leftrightarrow\;\; \mathcal{A} \vDash \varphi(b_1, \dots, b_n)$$

Dokážte.

Upozornenie. Čitateľ s istými znalosťami z teórie grafov by si mal uvedomiť, že pojem podštruktúry zodpovedá pojmu *indukovaného podgrafu* daného grafu $G = (V; E)$, a nie pojmu jeho ľubovoľného podgrafu.

Vlastnosti podštruktúr vykazujú istú citlivosť voči jazyku. Nasledujúca úloha ukazuje, čo tým máme na mysli.

1.1.3 Úloha. Už sme spomínali tri možné definície grúp ako štruktúr $(G; \cdot)$, $(G; \cdot, e)$, resp. $\big(G; \cdot, e, {}^{-1}\big)$ v rôzne bohatých jazykoch.

(a) Nájdite niekoľko príkladov grúp $\mathcal{G} = (G; \cdot)$, resp. $\mathcal{G} = (G; \cdot, e)$ a ich podštruktúr, ktoré samy nie sú grupy. Na základe toho si uvedomte, že, v oboch týchto jazykoch, podštruktúra grupy nemusí byť jej podgrupou.

(b) Dokážte, že každá podštruktúra grupy $\mathcal{G} = \big(G; \cdot, e, {}^{-1}\big)$ je i sama grupou. V tomto prípade ju teda možno oprávnene nazývať podgrupou danej grupy.

V súvislosti s podštruktúrami grúp, ktoré nie sú podgrupami, sa vynára všeobecná otázka, ktoré vlastnosti danej štruktúry, vyjadrené formulami prvého rádu, sa prenášajú na jej podštruktúry, prípadne na jej rozšírenia. Isté triedy takýchto fomúl môžeme opísať pomerne ľahko.

Hovoríme, že formula φ je *otvorená*, ak neobsahuje nijaké kvantifikátory. Hovoríme, že φ je *univerzálna* formula, ak φ má tvar $(\forall\, x_1, \dots, x_n)\psi$, kde ψ je otvorená formula. Podobne hovoríme, že φ je *existenčná* formula, ak φ má tvar $(\exists\, x_1, \dots, x_n)\psi$, kde ψ je otvorená formula. Zrejme negácia univerzálnej (existenčnej) formuly je logicky ekvivalentná s existenčnou (univerzálnou) formulou.

1.1.4 Tvrdenie. *Nech $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sú štruktúry prvého rádu a $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.*
(a) *Ak $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ je otvorená formula, tak pre všetky $b_1, \dots, b_n \in B$ platí*

$$\mathcal{B} \vDash \varphi(b_1, \dots, b_n) \;\;\Leftrightarrow\;\; \mathcal{A} \vDash \varphi(b_1, \dots, b_n)$$

(b) *Ak* $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ *je univerzálna formula, tak pre všetky* $b_1, \dots, b_n \in B$ *platí*

$$\mathcal{A} \models \varphi(b_1, \dots, b_n) \;\;\Rightarrow\;\; \mathcal{B} \models \varphi(b_1, \dots, b_n)$$

(c) *Ak* $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ *je existenčná formula, tak pre všetky* $b_1, \dots, b_n \in B$ *platí*

$$\mathcal{B} \models \varphi(b_1, \dots, b_n) \;\;\Rightarrow\;\; \mathcal{A} \models \varphi(b_1, \dots, b_n)$$

Dôkaz. (a) Tvrdenie možno jednoducho dokázať indukciou podľa zložitosti vzhľadom na logické spojky $\neg$ a (napríklad) $\wedge$. Pre atomickú formulu φ sa stačí odvolať na Úlohu 1.1.2. Indukčné kroky pre $\neg$ a $\wedge$ prenechávame čitateľovi.

(b) Univerzálna formula φ má tvar $(\forall\, y_1, \dots, y_m)\psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ pre nejakú otvorenú formulu ψ. Podmienka $\mathcal{A} \models \varphi(b_1, \dots, b_n)$ znamená, že

$$(\forall\, a_1, \dots, a_m \in A)\big(\mathcal{A} \models \psi(b_1, \dots, b_n, a_1, \dots, a_m)\big)$$

Keďže $B \subseteq A$, tak tým skôr

$$(\forall\, a_1, \dots, a_m \in B)\big(\mathcal{A} \models \psi(b_1, \dots, b_n, a_1, \dots, a_m)\big)$$

Potrebný záver vyplýva z (a).

(c) možno dokázať analogicky ako (b), alebo odvodiť z (b) s využitím faktu, že každá existenčná formula je logicky ekvivalentná s negáciou univerzálnej.

1.1.5 Dôsledok. *Nech* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ *sú štruktúry prvého rádu a* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

(a) *Ak* φ *je uzavretá univerzálna formula, tak z* $\mathcal{A} \models \varphi$ *vyplýva* $\mathcal{B} \models \varphi$.

(b) *Ak* φ *je uzavretá existenčná formula, tak z* $\mathcal{B} \models \varphi$ *vyplýva* $\mathcal{A} \models \varphi$.

Inak povedané, univerzálne vlastnosti sa prenášajú na podštruktúry a existenčné vlastnosti sa prenášajú na nadštruktúry. Z toho naopak vyplýva, že vlastnosti, ktoré sa neprenášajú na podštruktúry (nadštruktúry), nemožno vyjadriť univerzálnymi (existenčnými) formulami. V nasledujúcej úlohe si predvedieme niekoľko využití tohto poznatku.

1.1.6 Úloha. (a) Pomocou formuly v jazyku, ktorého jediným špecifickým symbolom je znak binárnej operácie $\cdot$, vyjadrite podmienku existencie neutrálneho prvku tejto operácie. Dokážte, že táto podmienka sa nedá vyjadriť ani univerzálnou ani existenčnou formulou v tomto jazyku.

(b) Pomocou formuly v jazyku, ktorého jedinými špecifickými symbolmi sú znak binárnej operácie $\cdot$ a konštantný sybol e vyjadrite univerzálnou formulou podmienku, že e je neutrálny prvok tejto operácie. Dokážte, že táto podmienka sa nedá vyjadriť existenčnou formulou.

(c) V rovnakom jazyku ako v (b) (a za podmienky, že e plní úlohu neutrálneho prvku operácie $\cdot$) vyjadrite podmienku existencie inverzného prvku tejto operácie k ľubovoľnému prvku. Dokážte, že táto podmienka sa nedá vyjadriť ani univerzálnou ani existenčnou formulou v tomto jazyku.

(d) Nájdite samostatne ďalšie príklady vlastností, ktoré sa nedajú vyjadriť univerzálnymi resp. existenčnými formulami istého jazyka.

1.1.7 Úloha. Uvažujme pole všetkých reálnych čísel ako štruktúru $(\mathbb{R};\, +, \cdot, 0, 1)$.

(a) Nájdite príklady podštruktúr tejto štruktúry, ktoré sú okruhmi, no nie sú poľami. Nájdite tiež príklady jej podštruktúr, ktoré nie sú ani okruhmi.

(b) Ako vyzerá vôbec najmenšie podpole poľa $(\mathbb{R}; +, \cdot, 0, 1)$ a ako vyzerá jeho najmenšie podpole, ktoré obsahuje všetky celé čísla? Ako vyzerá najmenšie podpole poľa $(\mathbb{R}; +, \cdot, 0, 1)$, ktoré obsahuje číslo $\sqrt{2}$, prípadne číslo $\sqrt[3]{5}$, resp. číslo π ?

(c) Ako vyzerá vôbec najmenšia podštruktúra poľa $(\mathbb{R}; +, \cdot, 0, 1)$? Je to pole (okruh)?

V tejto súvislosti sa prirodzene vynárajú otázky, či možno všetky vlastnosti, ktoré sa prenášajú na podštruktúry (nadštruktúry), vyjadriť pomocou univerzálnych (existenčných) formúl. *A priori* sa totiž nedá vylúčiť, že by sa takto mohli prenášať aj niektoré vlastnosti vyjadrené formulami iného syntaktického tvaru. Prezradíme už vopred, že odpoveď na obe uvedené otázky je kladná, no na dôkazy týchto výsledkov si budeme musieť ešte nejakú chvíľu počkať.

1.2 Homomorfizmy

Homomorfizmom (zo) štruktúry $\mathcal{A} = (A; \dots)$ do štruktúry $\mathcal{B} = (B; \dots)$ nazývame zobrazenie $h\colon A \to B$ také, že pre ľubovoľný n-árny funkcionálny symbol $f \in F$ resp. relačný symbol $r \in R$ a všetky $a_1, \dots, a_n \in A$ platí

$$h\big(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)\big) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$$
$$(a_1, \dots, a_n) \in r^{\mathcal{A}} \;\Rightarrow\; (h(a_1), \dots, h(a_n)) \in r^{\mathcal{B}}$$

Špeciálne pre konštantý symbol $f \in F$ to znamená, že $h\big(f^{\mathcal{A}}\big) = f^{\mathcal{B}}$. Skutočnosť, že zobrazenie $h\colon A \to B$ je homomorfizmom z $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$ symbolicky zapisujeme v tvare $h\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ resp. $h\colon (A; \dots) \to (B; \dots)$. Jednoducho povedané, homomorfizmy sú zobrazenia medzi štruktúrami, ktoré zachovávajú ich základné operácie (vrátane nulárnych) a relácie.

1.2.1 Úloha. Nech $h\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je homomorfizmus, $t(x_1, \dots, x_n)$ je term a $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ je atomická formula. Potom pre všetky $a_1, \dots, a_n \in A$ platí

$$h\big(t^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)\big) = t^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$$
$$\mathcal{A} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n) \;\Rightarrow\; \mathcal{B} \vDash \varphi(h(a_1), \dots, h(b_n))$$

Dokážte.

Čitateľ sa už zrejme stretol s homomorfizmami grúp či homomorfizmami okruhov. Taktiež lineárne zobrazenia medzi vektorovými priestormi nad daným poľom F nie sú vlastne ničím iným ako homomorfizmami medzi štruktúrami tvaru $\big(V; F \cup \{+\}\big)$ s binárnou operáciou sčítania $+$ a unárnymi operáciami násobenia skalármi $f \in F$.

Stojí za povšimnutie, že, na rozdiel od podštruktúr, vykazujú homomorfizmy medzi grupami značnú nezávislosť na jazyku. S vysvetlením tohto faktu sa zoznámime ešte v tomto paragrafe.

1.2.2 Úloha. Nech $\big(G; \cdot, e, ^{-1}\big)$, $\big(H; \cdot, e, ^{-1}\big)$ sú grupy a $h\colon G \to H$ je ľubovoľmé zobrazenie. Dokážte, že nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:
(i) h je homomorfizmus $\big(G; \cdot, e, ^{-1}\big) \to \big(H; \cdot, e, ^{-1}\big)$;
(ii) h je homomorfizmus $(G; \cdot, e) \to (H; \cdot, e)$;
(iii) h je homomorfizmus $(G; \cdot) \to (H; \cdot)$.

Kompozícia homomorfizmov je opäť homomorfizmus. Ďalej homomorfizmy zachovávajú podštruktúry daných štruktúr „oboma smermi“. Jednoduché dôkazy týchto faktov ponechávame ako cvičenie čitateľovi.

1.2.3 Tvrdenie. *Nech $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sú štruktúry prvého rádu a $h\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $g\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ sú homomorfizmy. Potom aj zložené zobrazenie $g \circ h\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ je homomorfizmus.*

1.2.4 Tvrdenie. *Nech $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sú štruktúry prvého rádu a $h\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je homomorfizmus.*

(a) *Ak $M \subseteq A$ je podštruktúra štruktúry $\mathcal{A}$, tak množina*

$$h[M] = \{h(a)\colon a \in M\} \subseteq B$$

je podštruktúrou štruktúry $\mathcal{B}$.

(b) *Ak $N \subseteq A$ je podštruktúra štruktúry $\mathcal{B}$, pričom množina*

$$h^{-1}[N] = \{a \in A\colon h(a) \in N\} \subseteq A$$

je neprázdna, tak $h^{-1}[N]$ je podštruktúra štruktúry $\mathcal{A}$.

Krátko povedané, homomorfný obraz podštruktúry je podštruktúra a homomorfný vzor podštruktúry, pokiaľ je neprázdny, je tiež podštruktúra. Uvedomme si, že v prípade, keď jazyk L obsahuje aspoň jeden konštantný symbol, je podmienka $h^{-1}[N] \neq \emptyset$ automaticky splnená pre každú podštruktúru N šruktúry $\mathcal{B}$.

Hovoríme, že štruktúra $\mathcal{B}$ je *homomorfným obrazom* štruktúry $\mathcal{A}$, ak existuje surjektívny homomorfizmus $h\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Zaujíma nás, aké vlastnosti sa prenášajú na homomorfné obrazy. Hovoríme, že formula φ je *pozitívna*, ak je vytvorená z atomických formúl výlučne pomocou logických spojok $\wedge$, $\vee$ a kvantifikátorov $\forall$, $\exists$.

1.2.5 Tvrdenie. *Nech $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sú štruktúry prvého rádu a $h\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je surjektívny homomorfizmus. Potom pre ľubovoľnú pozitívnu formulu $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ a všetky $a_1, \ldots, a_n \in A$ platí*

$$\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \;\;\Rightarrow\;\; \mathcal{B} \models \varphi(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

Dôkaz. Budeme postupovať indukciou podľa zložitosti. Pre atomickú formulu φ sa stačí odvolať na Úlohu 1.2.1. Indukčné kroky vzhľadom na obe logické spojky resp. oba kvantifikátory vykonáme naraz. Nech $*$ označuje ktorúkoľvek z logických spojok $\wedge$, $\vee$ a Q označuje ktorýkoľvek z kvantifikátorov $\forall$, $\exists$ (tak v jazyku L ako aj v prirodzenom jazyku).

Predpokladajme, že dokazovaná implikácia platí pre každú z formúl $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, $\psi(x_1, \ldots, x_n)$, a zvoľme ľubovoľné $a_1, \ldots, a_n \in A$. Potom podmienka

$$\mathcal{A} \models (\varphi * \psi)(a_1, \ldots, a_n)$$

je ekvivalentná s podmienkou

$$\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \; * \; \mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$$

Z toho podľa indukčného predpokladu vyplýva

$$\mathcal{B} \models \varphi(h(a_1), \ldots, h(a_n)) \; * \; \mathcal{B} \models \psi(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

čo je ekvivalentné s podmienkou

$$\mathcal{B} \models (\varphi * \psi)(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

Predpokladajme, že uvedená implikácia platí pre formulu $\varphi(x, x_1, \dots, x_n)$, a zvoľme ľubovoľné $a_1, \dots, a_n \in A$. Potom podmienka

$$\mathcal{A} \models (\mathrm{Q}\, x)\varphi(x, a_1, \dots, a_n)$$

je ekvivalentná s podmienkou

$$(\mathrm{Q}\, a \in A)\big(\mathcal{A} \models \varphi(a, a_1, \dots, a_n)\big)$$

Z toho podľa indukčného predpokladu vyplýva

$$(\mathrm{Q}\, a \in A)\big(\mathcal{B} \models \varphi(h(a), h(a_1), \dots, h(a_n))\big)$$

Z uvedenej podmienky vyplýva

$$(\mathrm{Q}\, b \in B)\big(\mathcal{B} \models \varphi(b, h(a_1), \dots, h(a_n))\big)$$

Pre existenčný kvantifikátor $\exists$ je to zrejmé – stačí položiť $b = h(a)$. Analogický záver pre univerzálny kvantifikátor $\forall$ platí vďaka surjektívnosti zobrazenia h – každé $b \in B$ má totiž tvar $b = h(a)$ pre nejaké $a \in A$. V oboch prípadoch tak dostávame

$$\mathcal{B} \models (\mathrm{Q}\, x)\varphi(x, h(a_1), \dots, h(a_n))$$

1.2.6 Dôsledok. *Nech štruktúra $\mathcal{B}$ je homomorfným obrazom štruktúry $\mathcal{A}$. Potom pre ľubovoľnú uzavretú pozitívnu formulu φ z $\mathcal{A} \models \varphi$ vyplýva $\mathcal{B} \models \varphi$.*

Inak povedané, pozitívne vlastnosti sa prenášajú na homomorfné obrazy.

Pri podrobnejšom pohľade na dôkaz Tvrdenia vyjde najavo, že podmienku surjektívnosti zobrazenia φ sme použili iba v indukčnom kroku pre univerzálny kvantifikátor. Tým sme vlastne zároveň dokázali nasledujúci výsledok.

1.2.7 Tvrdenie. *Nech $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sú štruktúry prvého rádu a $h\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je homomorfizmus. Potom pre ľubovoľnú existenčnú pozitívnu formulu $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ a všetky $a_1, \dots, a_n \in A$ platí*

$$\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \ \Rightarrow\ \mathcal{B} \models \varphi(h(a_1), \dots, h(a_n))$$

1.2.8 Úloha. Uvažujme o grupách ako o štruktúrach $(G;\, \cdot)$ v jazyku s jediným binárnym operačným symbolom $\cdot$. Vyjadrite formulami tohto jazyka vlastnosť $\varepsilon(u)$: „u je neutrálny prvok operácie $\cdot$“, resp. vzťah $\iota(x, y)$: y je inverzný prvok k prvku x vzhľadom na operáciu $\cdot$“. Presvedčte sa, že $\varepsilon(u)$ aj $\iota(x, y)$ sú (univerzálne) pozitívne formuly. Stačí samotný tento fakt na vysvetlenie implikácie (iii) $\Rightarrow$ (i) z Úlohy 1.2.2? Za akých okolností áno a za akých nie? Premyslite si, ako možno v našom prípade „zachrániť situáciu“.

Z Tvrdenia 1.2.5 okrem iného vyplýva, že vlastnosti, ktoré sa neprenášajú na homomorfné obrazy, nemožno vyjadriť pomocou pozitívnych formúl.

1.2.9 Úloha. Okruh $(A;\, +, \cdot, 0)$ sa nazýva *obor integrity*, ak spĺňa podmienku

$$(\forall\, x, y)(x \cdot y = 0 \ \Rightarrow\ (x = 0 \,\vee\, y = 0))$$

Dokážte, že vlastnosť okruhov „byť oborom integrity“ nemožno vyjadriť pozitívnou formulou. Nájdite ďalšie príklady vlastností štruktúr prvého rádu, ktoré nemožno vyjadriť pozitívnymi formulami.

Neskôr uvidíme, že aj naopak, vlastnosti prvého rádu, ktoré sa prenášajú na homomorfné, obrazy, možno vyjadriť pomocou pozitívnych formúl.

Formula φ sa nazýva *negatívna*, ak je negáciou pozitívnej formuly. Dôkazy nasledujúcich výsledkov o spätnom prenose negatívnych vlastností z homomorfných obrazov na pôvodnú štruktúru prenechávame ako cvičenie čitateľovi.

1.2.10 Tvrdenie. *Nech $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sú štruktúry prvého rádu a $h\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je surjektívny homomorfizmus. Potom pre ľubovoľnú negatívnuu formulu $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ a všetky prvky $a_1, \dots, a_n \in A$ platí*

$$\mathcal{B} \vDash \varphi(h(a_1), \dots, h(a_n)) \;\Rightarrow\; \mathcal{A} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

Ak φ je navyše uzavretá, tak z $\mathcal{B} \vDash \varphi$ vyplýva $\mathcal{A} \vDash \varphi$.

1.2.11 Tvrdenie. *Nech $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sú štruktúry prvého rádu a $h\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je homomorfizmus. Potom pre ľubovoľnú univerzálnu negatívnu formulu $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ a všetky prvky $a_1, \dots, a_n \in A$ platí*

$$\mathcal{B} \vDash \varphi(h(a_1), \dots, h(a_n)) \;\Rightarrow\; \mathcal{A} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

Ak φ je navyše uzavretá, tak z $\mathcal{B} \vDash \varphi$ vyplýva $\mathcal{A} \vDash \varphi$.

1.3 Izomorfizmy a vnorenia

Homomorfizmus $h\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ sa nazýva *izomorfizmus*, ak h je bijektívne zobrazenie a aj k nemu inverzné zobrazenie $h^{-1}\colon B \to A$ je homomorfizmus $h^{-1}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Fakt, že h je izomorfizmus štruktúry $\mathcal{A}$ na štruktúru $\mathcal{B}$ značíme $h\colon \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$. Hovoríme, že štruktúry $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sú *izomorfné*, ak existuje aspoň jeden izomorfizmus $h\colon \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$; píšeme $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Nasledujúce pozorovanie je očividné.

1.3.1 Tvrdenie. *Nech $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sú štruktúry prvého rádu.*
(a) *Identické zobrazenie* $\mathrm{Id}_A\colon A \to A$ *je izomorfizmus* $\mathrm{Id}_A\colon \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$.
(b) *Ak $h\colon \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$ je izomorfizmus, tak aj k nemu inverzné zobrazenie $h^{-1}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ je izomorfiznus.*
(c) *Ak $h\colon \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$, $g\colon \mathcal{B} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}$ sú izomorfimy, tak aj zložené zobrazenie $g \circ h\colon \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}$ je izomorfizmus.*

V dôsledku toho pre ľubovoľné štruktúry $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ platí

$$\begin{gathered} \mathcal{A} \cong \mathcal{A} \\ \mathcal{A} \cong \mathcal{B} \;\Rightarrow\; \mathcal{B} \cong \mathcal{A} \\ \mathcal{A} \cong \mathcal{B} \,\wedge\, \mathcal{B} \cong \mathcal{C} \;\Rightarrow\; \mathcal{A} \cong \mathcal{C} \end{gathered}$$

čiže vzťah izomorfnosti je *reflexívny*, *symetrický* a *tranzitívny*; jedným slovom, je to vzťah *ekvivalencie* na triede všetkých štruktúr jazyka L.

Čitateľ by si mal uvedomiť, že každý izomorfizmus je síce bijektívne zobrazenie, no nie každý bijektívny homomorfizmus je izomorfizmus.

1.3.2 Príklad. Nech jazyk L obsahuje jediný špecifický symbol – unárny predikátový symbol P. Nech ďalej $\mathcal{A}_1 = (A; P_1)$, $\mathcal{A}_2 = (A; P_2)$ sú dve štruktúry jazyka L s tou istou základnou množinou A a podmnožiny $P_1, P_2 \subseteq A$ slúžia ako interpretácie symbola P v štruktúre $\mathcal{A}_1$ resp. $\mathcal{A}_2$. Potom identické zobrazenie $\mathrm{Id}_A \colon A \to A$ je určite bijektívne. Homomorfizmus $\mathrm{Id}_A \colon \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ je to zrejme práve vtedy, keď $P_1 \subseteq P_2$, a izomorfizmus $\mathrm{Id}_A \colon \mathcal{A}_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_2$ je to práve vtedy, keď $P_1 = P_2$. Ak teda P_1 je vlastnou podmnožinou P_2, tak $\mathrm{Id}_A \colon \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ je príkladom bijektívnho homomorfizmu, ktorý nie je izomorfizmom.

Za určitých dodatočných podmienok je však už každý bijektívny homomorfizmus naozaj izomorfizmom.

1.3.3 Tvrdenie. *Predpokladajme, že jazyk L neobsahuje žiadne relačné symboly. Potom každý bijektívny homomorfizmus $h \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ medzi štruktúrami jazyka L je izomorfizmus.*

Dôkaz. Nech $h \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je bijektívny homomorfizmus. Stačí overiť, že pre každý n-árny operačný symbol $f \in F$ a všetky $b_1, \dots, b_n \in B$ platí

$$h^{-1}\big(f^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n)\big) = f^{\mathcal{A}}\big(h^{-1}(b_1), \dots, h^{-1}(b_n)\big)$$

Označme $a_i = h^{-1}(b_i)$ pre $1 \le i \le n$; potom $b_i = h(a_i)$. Ďalej, keďže h je homomorfizmus a $h^{-1} \circ h = \mathrm{Id}_A$,

$$\begin{aligned} h^{-1}\big(f^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n)\big) &= h^{-1}\big(f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))\big) \\ &= \big(h^{-1} \circ h\big)\big(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)\big) \\ &= f^{\mathcal{A}}\big(h^{-1}(b_1), \dots, h^{-1}(b_n)\big) \end{aligned}$$

1.3.4 Dôsledok. *Nech $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sú štruktúry prvého rádu. Potom zobrazenie $h \colon A \to B$ je izomorfizmus $h \colon \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$ práve vtedy, keď je bijektívne a pre každý n-árny funkcionálny symbol $f \in F$ resp. relačný symbol $r \in R$ a všetky $a_1, \dots, a_n \in A$ platí*

$$\begin{gathered} h\big(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)\big) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n)) \\ (a_1, \dots, a_n) \in r^{\mathcal{A}} \quad \Leftrightarrow \quad (h(a_1), \dots, h(a_n)) \in r^{\mathcal{B}} \end{gathered}$$

Zobrazenie $h \colon A \to B$ medzi základnými množinami štruktúr $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ nazývame *vnorením* štruktúry $\mathcal{A}$ do štruktúry $\mathcal{B}$, ak h je izomorfizmom štruktúry $\mathcal{A}$ na podštruktúru $h[A]$ štruktúry $\mathcal{B}$. V tom prípade píšeme $h \colon \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$.

Základným a najjednoduchším príkladom vnorenia je vnorenie podštruktúry $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ do štruktúry $\mathcal{A}$ prostredníctvom identického zobrazenia $\mathrm{Id}_B \colon B \hookrightarrow A$. Taktiež je zrejmé, že kompozícia vnorení $h \colon \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$, $g \colon \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{C}$ je sama vnorením $g \circ h \colon \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{C}$.

Z predošlého Dôsledku 1.3.4 okamžite vyplýva nasledujúca podrobnejšia charakterizácia vnorení.

1.3.5 Tvrdenie. *Nech $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sú štruktúry prvého rádu. Potom zobrazenie $h\colon A \to B$ je vnorením $h\colon \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ práve vtedy, keď je injektívne a pre každý n-árny funkcionálny symbol $f \in F$ resp. relačný symbol $r \in R$ a všetky $a_1, \dots, a_n \in A$ platí*

$$h\big(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)\big) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$$
$$(a_1, \dots, a_n) \in r^{\mathcal{A}} \iff (h(a_1), \dots, h(a_n)) \in r^{\mathcal{B}}$$

Z toho vyplýva, že ak jazyk L neobsahuje žiadne relačné symboly, tak každý injektívny homomorfizmus je vnorenie.

Ešte si uvedomme, že i samotná vlastnosť injektívnosti zobrazenia h

$$a = b \iff h(a) = h(b)$$

pre všetky $a, b \in A$, nie je ničím iným ako podmienkou obojsmerného zachovávania relácie rovnosti. Kým implikácia $\Rightarrow$ je triviálne splnená „vždy“, injektívnosť je daná práve obrátenou implikáciou $\Leftarrow$.

1.3.6 Úloha. Nech $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sú štruktúry prvého rádu. Dokážte, že zobrazenie $h\colon A \to B$ je vnorením $h\colon \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ práve vtedy, keď pre ľubovoľnú atomickú formulu $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ a všetky $a_1, \dots, a_n \in A$ platí

$$\mathcal{A} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n) \iff \mathcal{B} \vDash \varphi(h(a_1), \dots, h(a_n))$$

1.3.7 Tvrdenie. *Nech $(A; <)$, $(B; <)$ sú čiastočne usporiadané množiny. Ak $(A; <)$ je lineárne usporiadaná, tak každý homomorfizmus $h\colon (A; <) \to (B; <)$ je zároveň vnorením. Ak h je navyše surjektívny, tak je to izomorfizmus $h\colon (A; <) \xrightarrow{\sim} (B; <)$.*

Dôkaz. Nech $h\colon (A; <) \to (B; <)$ je homomorfizmus. Najprv ukážeme, že h je injektívne zobrazenie. Zvoľme dva rôzne prvky $a, b \in A$. Keďže usporiadanie $<$ množiny A je lineárne, platí $a < b$ alebo $b < a$. V prvom prípade z toho dostávame $h(a) < h(b)$, v druhom $h(b) < h(a)$, ted každopádne $h(a) \neq h(b)$. Ďalej treba overiť, že pre ľubobovoľné $a, b \in A$ z podmienky $h(a) < h(b)$ vyplýva $a < b$. Keďže h je injektívny, z $h(a) < h(b)$ vyplýva $a \neq b$. Potom $a < b$ alebo $b < a$. Druhá možnosť by však mala za následok $h(b) < h(a)$, čo je v spore s predpokladom $h(a) < h(b)$. Z toho okamžite vyplýva aj druhá časť tvrdenia.

1.3.8 Úloha. Sformulujte a dokážte analogické tvrdenie pre homomorfizmy a vnorenia čiastočne usporiadaných množín s neostrým usporiadaním $\leq$.

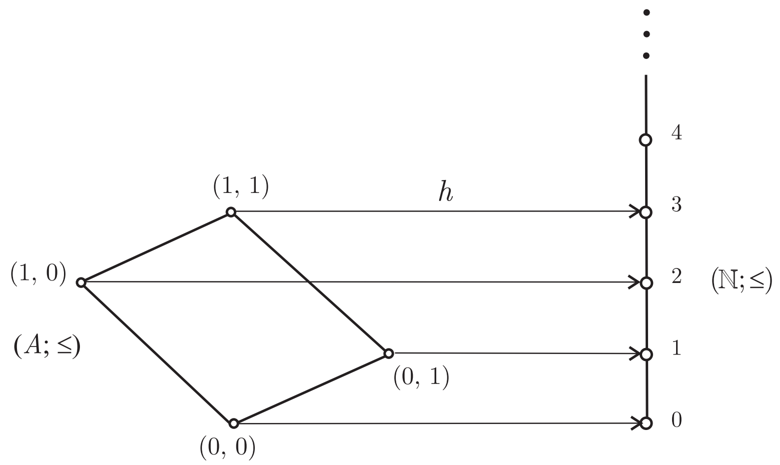
1.3.9 Príklad. Nech $(A; \leq)$ je množina $A = \{0,1\} \times \{0,1\}$ s čiastočným usporiadaním po zložkách, čiže

$$(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \iff a_1 \leq a_2 \ \wedge \ b_1 \leq b_2$$

pre $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A$. Nech ďalej $(\mathbb{N}; \leq)$ je množina všetkých prirodzených čísel s obvyklým (lineárnym) usporiadaním. Zobrazenie $h\colon A \to B$ je dané predpisom

$$h(a, b) = 2a + b$$

pre $(a, b) \in A$ (pozri obrázok).



Na prvý pohľad je zrejmé, že $h\colon (A; \leq) \to (\mathbb{N}; \leq)$ je injektívny homomorfizmus, no nie je to vnorenie. V $(\mathbb{N}; \leq)$ platí $h(0,1) = 1 \leq 2 = h(1,0)$, no v $(A; \leq)$ neplatí $(0,1) \leq (1,0)$ – prvky $(0,1)$, $(1,0)$ sú totiž neporovnateľné.

Z Dôsledku 1.1.5 okamžite vyplýva jeho nasledujúce zovšeobecnenie.

1.3.10 Tvrdenie. *Nech $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sú štruktúry prvého rádu a $h\colon \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ je vnorenie.*
(a) *Ak φ je uzavretá univerzálna formula, tak z $\mathcal{B} \vDash \varphi$ vyplýva $\mathcal{A} \vDash \varphi$.*
(b) *Ak φ je uzavretá existenčná formula, tak z $\mathcal{A} \vDash \varphi$ vyplýva $\mathcal{B} \vDash \varphi$.*

1.3.11 Úloha. (a) Sformulujte (a ak pciťujete potrebu, tak aj dokážte) analogické zovšeobecnenie Tvrdenia 1.1.4.
(b) Aké vlastnosti prvého rádu sa prenášajú prostredníctvom izomorfizmov?

1.4 Elementárna ekvivalencia a elementárne podštruktúry

Izomorfné L-štruktúry $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ možno považovať za „úplne rovnaké“ a v prípade potreby ich pomocou príslušného izomorfizmu dokonca stotožniť. Na mnohé účely teórie modelov je však ekvivalencia izomorfnosti „príliš prísna“. Z istého hľadiska možno štruktúry $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ považovať za „rovnaké“ už vtedy, keď majú rovnaké vlastnosti vyjadrené v jazyku L.

Hovoríme, že štruktúry $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sú *elementárne ekvivalentné*, označenie $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, ak pre každú uzavretú formulu φ platí

$$\mathcal{A} \vDash \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{B} \vDash \varphi$$

Okamžite je zrejmé, že vzťah elementárnej ekvivalencie je reflexívny, symetrický a tranzitívny, t. j. pre ľubovoľné štruktúry $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ platí

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$$
$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$$
$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \ \wedge \ \mathcal{B} \equiv \mathcal{C} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \equiv \mathcal{C}$$

teda je naozaj vzťahom ekvivalencie na triede všetkých štruktúr jazyka L. Rovnako je jasné, že izomorfné štruktúry sú elementárne ekvivalentné, čiže

$$\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \;\Rightarrow\; \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$$

pre ľubovoľné $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$. O existencii elementárne ekvivalentných štruktúr, ktoré nie sú izomorfné (napr. z dôvodu rôznych mohutností), sa budeme môť presvedčiť zakrátko.

1.4.1 Úloha. Nech aspoň jedna zo štruktúr $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ je konečná. Potom $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ práve vtedy, keď $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. Dokážte. (*Pomôcka*: Najprv dokážte, že ak je napr. štruktúra $\mathcal{A}$ konečná a $|A| = n$, tak z $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ vyplýva $|B| = n$. Ďalej skúste dokázať implikáciu $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ za dodatočného predpokladu, že jazyk L má len konečne mnoho špecifických symbolov. Nakoniec skúste všeobecný prípad previesť na túto situáciu.)

Teóriou štruktúry $\mathcal{A}$ nazývame množinu

$$\mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \{\varphi \in \mathrm{Form}(L) \colon \varphi \text{ je uzavretá a } \mathcal{A} \models \varphi\}$$

všetkých uzavretých formúl jazyka L, ktoré platia v štruktúre $\mathcal{A}$. Zrejme pre ľubovoľné štruktúry $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ platí

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \mathrm{Th}(\mathcal{B})$$

Keďže pre každú štruktúru $\mathcal{A}$ je $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ úplná teória, pre ľubovoľné štrutúry $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sú nasledujúce tri podmienky ekvivalentné:

$$\mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \mathrm{Th}(\mathcal{B}), \quad \mathrm{Th}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Th}(\mathcal{B}), \quad \mathrm{Th}(\mathcal{A}) \supseteq \mathrm{Th}(\mathcal{B})$$

To však znamená, že logickú ekvivalenciu v definícii elementárnej ekvivalencie možno nahradiť ktoroukoľvek z implikácií $\Rightarrow$, $\Leftarrow$.

1.4.2 Tvrdenie. *Pre ľubovoľné štruktúry $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ nasledujúce podmienky sú ekvivalené:*
(i) $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$
(ii) *pre každú uzavretú formulu φ platí* $\mathcal{A} \models \varphi \;\Rightarrow\; \mathcal{B} \models \varphi$
(iii) *pre každú uzavretú formulu φ platí* $\mathcal{B} \models \varphi \;\Rightarrow\; \mathcal{A} \models \varphi$.

K rovnakému záveru možno dospieť aj na základe skutočnosti, že systém všetkých uzavretých formúl jazyka L je uzavretý vzhľadom na negáciu. Rozmyslite si ako.

Ešte tesnejší vzťah podobnosti štruktúr je vzťah elementárnej podštruktúry. Hovoríme, že štruktúra $\mathcal{A}$ je *elementárnou podštruktúrou* štruktúry $\mathcal{B}$, prípadne, že štruktúra $\mathcal{B}$ je *elementárnym rozšírením* štruktúry $\mathcal{A}$, ak $A \subseteq B$ a pre *každú* formulu $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ jazyka L a všetky $a_1, \ldots, a_n \in A$ platí

$$\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \;\Leftrightarrow\; \mathcal{B} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$$

Tento fakt zapisujeme symbolicky v tvare $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$, prípadne $\mathcal{B} \succ \mathcal{A}$. Rozmyslite si, že z podmienky $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ už vyplýva $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, teda každá elementárna podštruktúra štruktúry $\mathcal{B}$ je naozaj jej podštruktúrou.

1.4.3 Úloha. Overte, že pre ľubovolné štruktúry $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ platí

$$\begin{gathered}
\mathcal{A} \prec \mathcal{A}\\
\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \;\Rightarrow\; \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}\\
\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \,\wedge\, \mathcal{B} \prec \mathcal{C} \;\Rightarrow\; \mathcal{A} \prec \mathcal{C}\\
\mathcal{A} \prec \mathcal{C} \,\wedge\, \mathcal{B} \prec \mathcal{C} \,\wedge\, \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \;\Rightarrow\; \mathcal{A} \prec \mathcal{B}
\end{gathered}$$

Kedže aj systém všetkých L-formúl je uzavretý vzhľadom na negáciu, možno i v definícii elementárnej podštruktúry nahradiť logickú ekvivalenciu ktoroukoľvek z implikácií $\Rightarrow$, $\Leftarrow$.

1.4.4 Tvrdenie. *Pre ľubovoľné štruktúry $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ také, že $A \subseteq B$, nasledujúce podmienky sú ekvivalené:*

(i) $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$

(ii) *pre ľubovoľnú L-formulu $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ a všetky $a_1, \ldots, a_n \in A$ platí*

$$\mathcal{A} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n) \;\Rightarrow\; \mathcal{B} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n)$$

(iii) *pre ľubovoľnú L-formulu $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ a všetky $a_1, \ldots, a_n \in A$ platí*

$$\mathcal{B} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n) \;\Rightarrow\; \mathcal{A} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n)$$

1.4.5 Príklad. Pole $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q};\, +, \cdot, 0, 1)$ všetkých racionálnych čísel je podštruktúrou poľa $\mathcal{R} = (\mathbb{R};\, +, \cdot, 0, 1)$ všetkých reálnych čísel. Tieto polia však nie sú elementárne ekvivalentné. Keďže v $\mathbb{Q}$ neexistuje odmocnina z dvoch, máme

$$\mathcal{Q} \vDash \neg(\exists\, x)(x \cdot x = 1 + 1)$$

zatiaľ čo $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, teda

$$\mathcal{R} \vDash (\exists\, x)(x \cdot x = 1 + 1)$$

Preto nemôže platiť $\mathcal{Q} \prec \mathcal{R}$. Skúste analogicky zdôvodniť, že pole $\mathcal{R}$ nie je elementárne ekvivalentné s poľom $(\mathbb{C};\, +, \cdot, 0, 1)$ všetkých komplexných čísel, teda nemôže byť jeho elementárnou podštruktúrou. Na druhej strane, ako dokázal Alfred Tarski v r. 1930, pole $(\mathbb{A};\, +, \cdot, 0, 1)$ všetkých algebraických čísel (t. j. riešení polynomických rovníc s racionálnymi koeficientmi) je elementárnou podštruktúrou poľa $(\mathbb{C};\, +, \cdot, 0, 1)$. Podobne, pole $(\mathbb{A} \cap \mathbb{R};\, +, \cdot, 0, 1)$ všetkých reálnych algebraických čísel je elementárnou podštruktúrou poľa $\mathcal{R}$. A keďže množiny $\mathbb{R}$ aj $\mathbb{C}$ majú mohutnosť kontinua, zatiaľ čo množiny $\mathbb{A} \cap \mathbb{R}$ a $\mathbb{A}$ sú spočítateľné, elementárne ekvivalentné polia $(\mathbb{A};\, +, \cdot, 0, 1) \equiv (\mathbb{C};\, +, \cdot, 0, 1)$, ani $(\mathbb{A} \cap \mathbb{R};\, +, \cdot, 0, 1) \equiv (\mathbb{R};\, +, \cdot, 0, 1)$ nemôžu byť izomorfné.

Nasledujúci výsledok, známy pod názvom Tarského alebo tiež Tarského-Vaughtovo kritérium, tak povediac lokalizuje otázku, či $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$, výlučne do „väčšej“ z oboch štruktúr $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$.

1.4.6 Veta. *Nech $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sú ľubovoľné štruktúry, pričom $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

(i) $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$

(ii) *Pre ľubovoľnú formulu $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ a všetky $a_1, \ldots, a_n \in A$ platí:*

$$(\exists\, b \in B)\big(\mathcal{B} \vDash \varphi(b, a_1, \ldots, a_n)\big) \;\Rightarrow\; (\exists\, a \in A)\big(\mathcal{B} \vDash \varphi(a, a_1, \ldots, a_n)\big)$$

Podmienka (ii) vlastne hovorí: ak má úloha „nájdi x také, že $\mathcal{B} \vDash \varphi(x, a_1, \dots, a_n)$“ s parametrami $a_1, \dots, a_n \in A$ aspoň jedno riešenie $b \in B$, tak táto úloha má aj nejaké riešenie $a \in A$.

Dôkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Nech $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$. Predpokladajme, že $\varphi(x, x_1, \dots, x_n)$ je formula a pre $a_1, \dots, a_n \in A$ platí $(\exists\, b \in B)\big(\mathcal{B} \vDash \varphi(b, a_1, \dots, a_n)\big)$, čiže $\mathcal{B} \vDash (\exists\, x)\varphi(x, a_1, \dots, a_n)$. Potom aj $\mathcal{A} \vDash (\exists\, x)\varphi(x, a_1, \dots, a_n)$, t. j. $(\exists\, a \in A)\big(\mathcal{A} \vDash \varphi(a, a_1, \dots, a_n)\big)$. Pre také a máme $\mathcal{B} \vDash \varphi(a, a_1, \dots, a_n)$, teda $(\exists\, a \in A)\big(\mathcal{B} \vDash \varphi(a, a_1, \dots, a_n)\big)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Predpokladajme (ii). Indukciou podľa zložitosti dokážeme, že pre každú formulu $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ a všetky $a_1, \dots, a_n \in A$ platí

$$\mathcal{A} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{B} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

Pre atomickú φ je to tak, lebo $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Indukčné kroky pre logické spojky $\neg$ a $\wedge$ sú priamočiare – prenechávame ich čitateľovi. Takže sa obmedzíme iba na indukčný krok pre existenčný kvantifikátor $\exists$. Predpokladajme teda, že uvedená ekvivalencia platí pre formulu $\varphi(x, x_1, \dots, x_n)$ a všetky $a, a_1, \dots, a_n \in A$. Potrebujeme overiť jej platnosť pre formulu $(\exists\, x)\varphi(x, x_1, \dots, x_n)$ a všetky $a_1, \dots, a_n \in A$. Pre ne sú nasledujúce podmienky ekvivalentné:

$$\mathcal{A} \vDash (\exists\, x)\varphi(x, a_1, \dots, a_n) \tag{1}$$

$$(\exists\, a \in A)\big(\mathcal{A} \vDash \varphi(a, a_1, \dots, a_n)\big) \tag{2}$$

$$(\exists\, a \in A)\big(\mathcal{B} \vDash \varphi(a, a_1, \dots, a_n)\big) \tag{3}$$

$$(\exists\, b \in B)\big(\mathcal{B} \vDash \varphi(b, a_1, \dots, a_n)\big) \tag{4}$$

$$\mathcal{B} \vDash (\exists\, x)\varphi(x, a_1, \dots, a_n) \tag{5}$$

Na vysvetlenie dodávame, že ekvivalencie (1) $\Leftrightarrow$ (2) a (4) $\Leftrightarrow$ (5) vyplývajú z definície spĺňania formúl v štruktúrach, ekvivalencia (2) $\Leftrightarrow$ (3) je dôsledkom indukčného predpokladu, implikácia (3) $\Rightarrow$ (4) je triviálna, zatiaľ čo obrátená implikácia (4) $\Rightarrow$ (3) je priamo podmienka (ii) dokazovanej Vety.

Zobrazenie $h\colon A \to B$ medzi základnými množinami štruktúr $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ nazývame *elementárnym vnorením* štruktúry $\mathcal{A}$ do štruktúry $\mathcal{B}$, ak h je izomorfizmom štruktúry $\mathcal{A}$ na *elementárnu* podštruktúru $h[A]$ štruktúry $\mathcal{B}$. V tom prípade píšeme $h\colon \mathcal{A} \overset{\prec}{\to} \mathcal{B}$.

Najjednoduchším príkladom elementárneho vnorenia je vnorenie elementárnej podštruktúry $\mathcal{B} \prec \mathcal{A}$ do štruktúry $\mathcal{A}$ prostredníctvom identického zobrazenia $\mathrm{Id}_B\colon B \to A$. Taktiež je zrejmé, že kompozícia elementárnych vnorení $h\colon \mathcal{A} \overset{\prec}{\to} \mathcal{B}$, $g\colon \mathcal{B} \overset{\prec}{\to} \mathcal{C}$ je sama elementárnym vnorením $g \circ h\colon \mathcal{A} \overset{\prec}{\to} \mathcal{C}$.

1.4.7 Úloha. (a) Sformulujte a dokážte zovšeobecnenia Tvrdenia 1.4.4 a Vety 1.4.6 z elementárnych podštruktúr na elementárne vnorenia.

(b) Nech $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sú štruktúry, $h\colon \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ je vnorenie a $g\colon \mathcal{B} \overset{\prec}{\to} \mathcal{C}$ je elementárne vnorenie také, že zložené zobrazenie $g \circ h\colon \mathcal{A} \overset{\prec}{\to} \mathcal{C}$ je tiež elementárne vnorenie. Dokážte, že potom aj $h\colon \mathcal{A} \overset{\prec}{\to} \mathcal{B}$ je elementárne vnorenie. Ktorý skôr uvedený fakt o elementárnych podštruktúrach zovšeobecňuje toto tvrdenie?

1.5 Diagramy štruktúr

V tomto paragrafe sa zbežne zoznámime s tzv. *metódou diagramov*, založenou na rozširovaní základného jazyka o nové konštantné symboly. Táto metóda nám umožní konštruovať z daných štruktúr nové štruktúry predpísaných vlastností, ktoré reflektujú isté vlastnosti pôvodných štruktúr, ako modely vhodných teórií v rozšírenom jazyku.

Nech L je jazyk prvého rádu, $\mathcal{A} = (A; \dots)$ je L-štruktúra a $M \subseteq A$. Jazyk, ktorý vznikne z jazyka L jeho rozšírením o množinu nových konštánt $\{c_a \colon a \in M\}$ (pričom konštantné symboly c_a prislúchajúce rôznym prvkom množiny M sú rôzne), budeme značiť L_M. Štruktúru jazyka L_M, ktorá vznikne zo štruktúry $\mathcal{A}$ tak, že interpretácie symbolov pôvodného jazyka L ponecháme nezmenené a každú z nových konštant c_a budeme interpretovať ako prvok $a \in M$, označíme

$$\mathcal{A}_M = (\mathcal{A}, a)_{a \in M}$$

Najdôležitejší pre nás bude špeciálny prípad, keď $M = A$; vtedy $\mathcal{A}_A = (\mathcal{A}, a)_{a \in A}$. Podobne, ak $\mathcal{B}$ je ďalšia L-štruktúra a $h\colon A \to B$ je nejaké zobrazenie, tak $\big(\mathcal{B}, h(a)\big)_{a \in A}$ označuje štruktúru jazyka L_A, v ktorej sú jednotlivé konštanty c_a interpretované prvkami $h(a)$ (a pôvodné symboly jazyka L interpretované rovnako ako v $\mathcal{B}$).

Atomickým diagramom, alebo len krátko *diagramom L-štruktúry* $\mathcal{A}$ nazývame množinu formúl

$$\mathrm{D}(\mathcal{A}) = \{\varphi \in \mathrm{Form}(L_A) \colon \varphi \text{ je uzavretá atomická alebo negatomická a } \mathcal{A}_A \vDash \varphi\}$$

Uvedomte si, že každá uzavretá formula φ jazyka L_A má tvar $\psi(c_{a_1}, \dots, c_{a_n})$ pre istú formulu $\psi(x_1, \dots, x_n)$ pôvodného jazyka L. V takom prípade je podmienka $\mathcal{A}_A \vDash \varphi$, t. j.

$$\mathcal{A}_A \vDash \psi(c_{a_1}, \dots, c_{a_n})$$

ekvivalentná s podmienkou

$$\mathcal{A} \vDash \psi(a_1, \dots, a_n)$$

takže si môžeme dovoliť nerozlišovať medzi predposledným a posledným zápisom.

Pozitívnym atomickým diagramom L-štruktúry $\mathcal{A}$ nazývame množinu formúl

$$\mathrm{D}^+(\mathcal{A}) = \{\varphi \in \mathrm{Form}(L_A) \colon \varphi \text{ je uzavretá atomická a } \mathcal{A}_A \vDash \varphi\}$$

Zrejme platí $\mathrm{D}^+(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{D}(\mathcal{A})$, pričom „menší“ z oboch diagramov $\mathrm{D}^+(\mathcal{A})$ je tvorený všetkými atomickými formulami z „väššieho“ diagramu $\mathrm{D}(\mathcal{A})$. Zdá sa teda, že „väčší“ diagram $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ obsahuje viac informácie ako ten „menší“ $\mathrm{D}^+(\mathcal{A})$. Nie je však tomu tak – v skutočnosti obsahujú oba diagramy rovnaké množstvo informácie. Z „menšieho“ diagramu $\mathrm{D}^+(\mathcal{A})$ možno totiž „väčší“ diagram $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ jednoducho zrekonštruovať. Z dvojice formúl $\varphi(a_1, \dots, a_n)$, $\neg\varphi(a_1, \dots, a_n)$, kde $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ je atomická L-formula a $a_1, \dots, a_n \in A$, patrí totiž do diagramu $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ práve jedna. Ak $\varphi(a_1, \dots, a_n) \in \mathrm{D}^+(\mathcal{A})$, tak je to $\varphi(a_1, \dots, a_n)$; ak $\varphi(a_1, \dots, a_n) \notin \mathrm{D}^+(\mathcal{A})$, je to $\neg\varphi(a_1, \dots, a_n)$. Dôvody, pre ktoré závadzame aj redundantný a zdanlivo zbytočne veľký diagram $\mathrm{D}(\mathcal{A})$, vyjdú najavo o chvíľu.

1.5.1 Príklad. Nech $\mathcal{A} = (A; \cdot)$ je konečná množina s jednou binárnou operáciou $\cdot$. Potom diagramy $\mathrm{D}(\mathcal{A})$, $\mathrm{D}^+(\mathcal{A})$ obsahujú rovnakú informáciu ako Cayleyho multiplikatívna tabuľka štruktúry $\mathcal{A}$. Prvok $c \in A$ sa v tejto tabuľke nachádza v riadku prvku $a \in A$ a v stĺpci prvku $b \in A$ práve vtedy, keď v $\mathcal{A}$ platí $a \cdot b = c$.

Nasledujúce tvrdenia vyjadrujú niektoré nám už známe vzťahy medzi štruktúrami pomocou práve zavedených diagramov.

1.5.2 Tvrdenie. *Nech $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sú štruktúry jazyka L.*
(a) *Nech $A \subseteq B$. Potom $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ práve vtedy, keď $\mathcal{B}_A \vDash \mathrm{D}(\mathcal{A})$.*
(b) *Nech $h\colon A \to B$. Potom h je vnorenie $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$ práve vtedy, keď $\big(\mathcal{B}, h(a)\big)_{a\in A} \vDash \mathrm{D}(\mathcal{A})$.*

1.5.3 Tvrdenie. *Nech $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sú štruktúry jazyka L a $h\colon A \to B$. Potom h je homomorfizmus z $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$ práve vtedy, keď $\big(\mathcal{B}, h(a)\big)_{a\in A} \vDash \mathrm{D}^+(\mathcal{A})$.*

Z oboch práve vyslovených tvrdení zároveň jasne vidno rozdielne úlohy, ktoré plnia oba diagramy $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ a $\mathrm{D}^+(\mathcal{A})$.

Ak sa nezameriame iba na atomické formuly, môžeme zaviesť ešte jeden typ diagramov. *Elementárnym* alebo tiež *úplným diagramom L-štruktúry $\mathcal{A}$* nazývame množinu formúl

$$\mathrm{Th}(\mathcal{A}_A) = \{\varphi \in \mathrm{Form}(L_A)\colon \varphi \text{ je uzavretá a } \mathcal{A}_A \vDash \varphi\}$$

Nasledujúce tvrdenie je priamou analógiou Tvrdenia 1.5.2.

1.5.4 Tvrdenie. *Nech $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sú štruktúry jazyka L.*
(a) *Nech $A \subseteq B$. Potom $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ práve vtedy, keď $\mathcal{B}_A \vDash \mathrm{Th}(\mathcal{A}_A)$.*
(b) *Nech $h\colon A \to B$. Potom h je elementárne vnorenie $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$ práve vtedy, keď $\big(\mathcal{B}, h(a)\big)_{a\in A} \vDash \mathrm{Th}(\mathcal{A}_A)$.*

Pre úplnosť si ešte uvedomme, že aj *teóriu štruktúry* $\mathcal{A}$ jazyka L

$$\mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \{\varphi \in \mathrm{Form}(L)\colon \varphi \text{ je uzavretá a } \mathcal{A} \vDash \varphi\}$$

možno považovať za istý typ diagramu, pomocou ktorého možno vyjadriť vzťah elementárnej ekvivalencie.

1.5.5 Tvrdenie. *Nech $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sú štruktúry jazyka L. Potom $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ práve vtedy, keď $\mathcal{B} \vDash \mathrm{Th}(\mathcal{A})$.*

1.5.6 Úloha. S využitím rozšírenia jazyka L o vhodné konštantné symboly zostručnite formuláciu podmienky (ii) v Tarského-Vaughtovom kritériu pre elementárne podštruktúry a zjednodušte zápis niektorých častí jeho dôkazu.

1.6 Vety Löwenheima, Skolema a Tarského

V tomto paragrafe dokážeme dva výsledky – vety Löwenheima, Skolema a Tarského „zhora nadol“ (downward) a „zdola nahor“ (upward) –, ktoré pre ľubovoľnú nekonečnú štruktúru $\mathcal{A}$ zaručujú existenciu mnohých jej elementárnych podštruktúr resp. elementárnych rozšírení vopred danej mohutnosti spĺňajúcej isté minimálne obmedzenia dané mohutnosťami jazyka L a samotnej štruktúry $\mathcal{A}$. Využijeme pri tom rozšírenia pôvodného jazyka o vhodné konštantné symboly a v dôkaze druhej z týchto viet sa zároveň po prvýkrát stretneme s jednoduchou aplikáciou metódy diagramov (konkrétne elementárneho diagramu $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_A)$ štruktúry $\mathcal{A}$).

Mohutnosťou jazyka $L = (F, R, \nu)$ nazývame kardinálne číslo

$$\|L\| = |\,\mathrm{Form}(L)| = \max(|F|, |R|, \aleph_0)$$

1.6.1 Veta Löwenheima, Skolema a Tarského „zhora nadol“. *Nech $\mathcal{A}$ je štruktúra nekonečnej mohutnosti $|A| = \alpha \geq \|L\|$ a β je kardinálne číslo také, že $\|L\| \leq \beta \leq \alpha$. Potom pre každú množinu $M \subseteq A$ mohutnosti $|M| \leq \beta$ existuje elementárna podštruktúra $\mathcal{B} \prec \mathcal{A}$ štruktúry $\mathcal{A}$ mohutnosti $|B| = \beta$ taká, že $M \subseteq B$.*

Dôkaz. Bez ujmy na na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $|M| = \beta$ (inak môžeme množinu M nahradiť množinou M' mohutnosti β takou, že $M \subseteq M' \subseteq A$). Rekurziou zostrojíme istú postupnosť $B_0 \subseteq B_1 \subseteq \ldots \subseteq B_n \subseteq B_{n+1} \subseteq \ldots$ podmnožín množiny A. Na začiatok položíme $B_0 = M$ a pre každé n množinu B_{n+1} vytvoríme tak, že pre ľubovoľnú formulu $\varphi(x)$ jazyka L_{B_n}, pre ktorú platí

$$\mathcal{A} \vDash (\exists\, x)\varphi(x)$$

vyberieme jeden prvok $b \in A$ taký, že $\mathcal{A} \vDash \varphi(b)$, a pridáme ho k prvkom množiny B_n. Ľahko možno overiť, že množina

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

má mohutnosť β a tvorí podštruktúru štruktúry $\mathcal{A}$. Na základe konštrukcie postupnosti (B_n) je podľa Tarského-Vaughtovho kritéria (Veta 1.4.6) zrejmé, že podštruktúra $\mathcal{B} = (B; \ldots)$ štruktúry $\mathcal{A}$ s nosičom B je jej elementárnou podštruktúrou. (Samostatne si doplňte vynechané kroky. Rozmyslite si, kde sme v dôkaze použili axiómu výberu.)

V prípade $\|L\| \leq \beta < \alpha$ je elementárna podštruktúra $\mathcal{B}$ štruktúry $\mathcal{A}$, ktorej existenciu zaručuje práve dokázaná veta, nevyhnutne vlastná. V prípade $\|L\| \leq \beta = \alpha$ to však len na základe tejto vety nevieme zaručiť.

1.6.2 Veta Löwenheima, Skolema a Tarského „zdola nahor“. *Nech $\mathcal{A}$ je štruktúra nekonečnej mohutnosti $|A| = \alpha$ a β je kardinálne číslo také, že $\|L_A\| = \max(\alpha, \|L\|) \leq \beta$. Potom existuje elementárne rozšírenie $\mathcal{B} \succ \mathcal{A}$ štruktúry $\mathcal{A}$ mohutnosti $|B| = \beta$.*

Dôkaz. Utvorme jazyk L_A a rozšírme ho o ďalšiu množinu nových konštantných symbolov D mohutnosti $|D| = \beta$. Toto rozšírenie jazyka L (a zároveň jazyka L_A) označíme $L^+ = (L_A)_D$. Ďalej označme U teóriu v jazyku L^+ požadujúcu, aby všetky konštanty $d \in D$ označovali rôzne prvky. Inak povedané, axiómami teórie U sú práve všetky nerovnosti $d_1 \neq d_2$ pre ľubovoľné dva rozličné koštantné symboly $d_1, d_2 \in D$. Keďže $|D| = \beta$, bude mať každý model teórie U mohutnosť aspoň β. Tvrdíme, že teória $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_A) \cup U$ v jazyku L^+ má nejaký model $\mathcal{M}$. Podľa vety o kompaktnosti stačí overiť, že pre ľubovoľnú konečnú podteóriu $U_0 \subseteq U$ teória $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_A) \cup U_0$ má nejaký model. Nech D_0 je množina všetkých konštantných symbolov $d \in D$ vyskytujúcich sa v axiómach teórie U_0. Zrejme D_0 je konečná množina. Vezmime si štruktúru $\mathcal{A}_A$ jazyka L_A a rozšírme ju do štruktúry $\mathcal{A}^+$ jazyka L^+ tak, že interpretácie symbolov jazyka L_A ponecháme nezmenené, konštanty $d \in D_0$ intrepretujeme navzájom rôznymi prvkami množiny A (čo je vždy možné, lebo A je nekonečná) a zvyšné konštanty $d \in D \setminus D_0$ interpretujeme ľubovoľnými prvkami množiny A. Je zrejmé, že $\mathcal{A}^+ \models \mathrm{Th}(\mathcal{A}_A) \cup U_0$.

Nech teda $\mathcal{M}$ je štruktúra jazyka L^+ taká, že $\mathcal{M} \models \mathrm{Th}(\mathcal{A}_A) \cup U$. Keďže $\mathcal{M} \models U$, platí $|M| \geq \beta$. Pretože $\mathcal{M} \models \mathrm{Th}(\mathcal{A}_A)$, zúženie $\mathcal{M}^- = \mathcal{M} \restriction L$ na štruktúru jazyka L (vynechaním interpretácií konštánt c_a a $d \in D$) je podľa Tvrdenia 1.5.4 elementárnym rozšírením (izomorfnej kópie) štruktúry $\mathcal{A}$. Podľa Vety 1.6.1 Löwenheima, Skolema a Tarského „zhora nadol“, $\mathcal{M}^-$ obsahuje elementárnu podštruktúru $\mathcal{B} \prec \mathcal{M}^-$ mohutnosti $|B| = \beta$ takú, že $A \subseteq B$. Potom $\mathcal{A} \prec \mathcal{M}^-$, $\mathcal{B} \prec \mathcal{M}^-$ a $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, preto tiež $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ (pozri Úlohu 1.4.3).

V prípade $\alpha < \beta$ je $\mathcal{B}$ opäť vlastným elementárnym rozšírením štruktúry $\mathcal{A}$. V prípade $\alpha = \beta$ to však len na základe práve dokázanej vety nevieme zaručiť. Otázka existencie vlastných elementárnych podštruktúr $\mathcal{B} \prec \mathcal{A}$, resp. vlastných elementárnych rozšírení $\mathcal{B} \succ \mathcal{A}$ danej štruktúry $\mathcal{A}$ mohutnosti $|A| = \alpha$ s rovnakou mohutnosťou $|B| = \alpha$ je podstatne náročnejšou záležitosťou.