3 ULTRAPRODUKTY A AXIOMATICKÉ TRIEDY

3.1 Priamy súčin štruktúr

Priamym alebo *karteziánskym súčinom* systému množín $(A_i)_{i\in I}$ nazývame množinu $\prod_{i\in I} A_i$ všetkých funkcií $\alpha\colon I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ takých, že $\alpha(i) \in A_i$ pre každé $i \in I$. Tvrdenie, že pre ľubovoľný systém $(A_i)_{i\in I}$ *neprázdnych* množín A_i je aj ich karteziánsky súčin neprázdny, je ekvivalentné s axiómou výberu, ktorej platnosť budeme automaticky predpokladať.

3.1.1 Úloha. Rozmyslite si, že pre *konečný* systém $(A_i)_{i=1}^n$ existuje prirodzená bijekcia medzi „dvoma verziami" karteziánskeho súčinu $A_1 \times \ldots \times A_n$ a $\prod_{i=1}^n A_i$ a explicitne ju popíšte.

Priamou alebo *karteziánskou mocninou* množiny A s množinou indexov I nazývame priamy súčin

$$A^I = \prod_{i\in I} A_i$$

v ktorom $A_i = A$ pre každé $i \in I$. Ak $I \neq \emptyset$, tak máme k dispozícii prosté *diagonálne zobrazenie* $A \to A^I$, ktoré zobrazí každý prvok $a \in A$ na konštantnú funkciu $\overline{a} \in A^I$, čiže $\overline{a}(i) = a$ pre všetky $i \in I$.

Nech $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ je systém štruktúr prvého rádu nad množinou I. *Priamym súčinom* týchto štruktúr nazývame štruktúru

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \prod_{i\in I} \mathcal{A}_i$$

so základnou množinou $\widetilde{A} = \prod_{i\in I} A_i$, v ktorej sú operačné a relačné symboly intepretované po zložkách, čiže pre ľubovoľný n-árny funkcionálny symbol f, resp. n-árny relačný symbol r jazyka L a všetky $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \widetilde{A}$ platí

$$f^{\widetilde{\mathcal{A}}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)(i) = f^{\mathcal{A}_i}(\alpha_1(i), \ldots, \alpha_n(i)) \qquad \text{pre každé } i \in I$$

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in r^{\widetilde{\mathcal{A}}} \iff (\alpha_1(i), \ldots, \alpha_n(i)) \in r^{\mathcal{A}_i} \qquad \text{pre každé } i \in I$$

Uvedené definície sa jednoducho prenesú aj na ľubovoľné termy resp. atomické formuly. Samostatne si overte, že pre ľubovoľný term $t(x_1, \ldots, x_n)$ resp. atomickú formulu $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ a prvky $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \widetilde{A}$ platí

$$t^{\widetilde{\mathcal{A}}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)(i) = t^{\mathcal{A}_i}(\alpha_1(i), \ldots, \alpha_n(i)) \qquad \text{pre každé } i \in I$$

$$\widetilde{\mathcal{A}} \vDash \varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \iff \mathcal{A}_i \vDash \varphi(\alpha_1(i), \ldots, \alpha_n(i)) \qquad \text{pre každé } i \in I$$

Pre úplnosť ešte definujeme priamy súčin prázdneho systému štruktúr (zodpovedajúci prípadu $I = \emptyset$) ako jednoprvkovú štruktúru s operačnými symbolmi interpretovanými jediným možným spôsobom a s plnými reláciami.

Ak je indexová množina I zrejmá z kontextu, píšeme len $\prod A_i$ resp. $\prod \mathcal{A}_i$.

Priamou alebo *karteziánskou mocninou* štruktúry $\mathcal{A}$ s množinou indexov I nazývame priamy súčin

$$\mathcal{A}^I = \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$$

v ktorom $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}$ pre každé $i \in I$. Zrejme ak $I \neq \emptyset$, tak diagonálne zobrazenie $A \to A^I$ je vnorením štruktúry $\mathcal{A}$ do jej priamej mocniny $\mathcal{A}^I$, čiže $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}^I$.

Pre ľubovoľnú formulu $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ jazyka L definujeme jej *booleovskú pravdivostnú hodnotu* na prvkoch $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \prod A_i$ ako množinu

$$[\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)] = \big\{ i \in I \colon \mathcal{A}_i \vDash \varphi(\alpha_1(i), \ldots, \alpha_n(i)) \big\}$$

Zrejme $[\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)] \subseteq I$, teda booleovská pravdivostná hodnota $[\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)]$ je prvkom Booleovej algebry $\mathcal{P}(I)$ všetkých podmnožín množiny I.

Všimnite si, že v priamej mocnine nadobúda booleovská pravdivostná hodnota na konštantných funkciách len dve hodnoty.

3.1.2 Tvrdenie. *Nech I je neprázdna množina, $\mathcal{A}$ je štruktúra a $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ je formula. Potom pre všetky $a_1, \ldots, a_n$ platí*

$$[\varphi(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n)] = \begin{cases} I & \text{ak } \mathcal{A} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n) \\ \emptyset & \text{ak } \mathcal{A} \nvDash \varphi(a_1, \ldots, a_n) \end{cases}$$

Booleovská pravdivostná hodnota formúl zachováva prirodzený súvis medzi logickými spojkami a booleovskými operáciami v Booleovej algebry $\mathcal{P}(I)$. Jednoduchý dôkaz nasledujúceho tvrdenia prenechávame ako cvičenie čitateľovi.

3.1.3 Tvrdenie. *Nech $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ je systém štruktúr a $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ sú formuly. Potom pre ľubovoľné $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \prod A_i$ platí*

$$\begin{aligned} [\neg\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)] &= I \smallsetminus [\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)] \\ [(\varphi \wedge \psi)(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)] &= [\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)] \cap [\psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)] \\ [(\varphi \vee \psi)(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)] &= [\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)] \cup [\psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)] \end{aligned}$$

Pre booleovskú pravdivostnú hodnotu existenčne kvantifikovaných formúl platí tzv. *princíp maximality.*

3.1.4 Tvrdenie. *Nech $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ je systém štruktúr a $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ je formula. Potom pre ľubovoľné $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \prod A_i$ existuje $\alpha_0 \in \prod A_i$ také, že pre ľubovoľné $\alpha \in \prod A_i$ platí*

$$[\varphi(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)] \subseteq [\varphi(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)] = [(\exists\, x)\varphi(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)]$$

Dôkaz. Označme

$$J = [(\exists\, x)\varphi(x, \alpha_1, \dots, \alpha_n)] = \big\{i \in I \colon (\exists\, a_i \in A_i)\big(\mathcal{A}_i \vDash \varphi(a_i, \alpha_1(i), \dots, \alpha_n(i))\big)\big\}$$

S použitím axiómy výberu definujeme funkciu $\alpha_0 \in \prod A_i$ takto:

$$\alpha_0(i) = \begin{cases} a_i & \text{kde pre prvok } a_i \in A_i \text{ platí } \varphi(a_i, \alpha_1(i), \dots, \alpha_n(i)), \text{ ak } i \in J \\ a_i & \text{kde } a_i \text{ je ľubovoľný prvok množiny } A_i, \text{ ak } i \notin J \end{cases}$$

Overenie, že funkcia α_0 spĺňa všetky požadované podmienky, prenechávame čitateľovi.

Nasledujúce dve tvrdenia ukazujú, že booleovská pravdivostná hodnota spĺňa podmienky analogické axiómam rovnosti. A s použitím týchto axióm ich naozaj možno jednoducho overiť – skúste samostatne.

3.1.5 Tvrdenie. *Nech $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ je systém štruktúr. Potom pre ľubovoľné $\alpha, \beta, \gamma \in \prod A_i$ platí*

$$[\alpha = \alpha] = I$$
$$[\alpha = \beta] = [\beta = \alpha]$$
$$[\alpha = \beta] \cap [\beta = \gamma] \subseteq [\alpha = \gamma]$$

3.1.6 Tvrdenie. *Nech $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ je systém štruktúr, $t(x_1, \dots, x_n)$ je term a $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ je formula jazyka L. Potom pre ľubovoľné $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n \in \prod A_i$ platí*

$$[\alpha_1 = \beta_1] \cap \ldots \cap [\alpha_n = \beta_n] \subseteq [t(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = t(\beta_1, \dots, \beta_n)]$$
$$[\alpha_1 = \beta_1] \cap \ldots \cap [\alpha_n = \beta_n] \cap [\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)] \subseteq [\varphi(\beta_1, \dots, \beta_n)]$$

Všimnite is, že pre atomickú fomulu $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ platí

$$\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i \vDash \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \;\Leftrightarrow\; [\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)] = I$$

čiže na jej splnenie je potrebné, aby „platila všade". Na druhej strane pre jej negáciu $\neg\varphi(x_1, \dots, x_n)$ máme

$$\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i \vDash \neg\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \;\Leftrightarrow\; [\neg\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)] \neq \emptyset$$

teda na jej splnenie postačuje, aby platila aspoň v jednej zo štruktúr $\mathcal{A}_i$. Inak povedané, naša definícia štruktúry $\prod \mathcal{A}_i$ má za následok, že pre spĺňanie formúl rôzneho syntaktického tvaru platia rôzne kritériá na ich booleovskú pravdivostnú hodnotu. V nasledujúcich troch paragrafoch sa pokúsime v tejto situácii trochu zorientovať.

3.2 Filtre a ultrafiltre

Filtrom na množine I nazývame ľubovoľnú neprázdnu množinu $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(I)$ takú, že pre ľubovoľné $X, Y \subseteq I$ platí

(a) ak $X \in \mathcal{D}$ a $X \subseteq Y$, tak $Y \in \mathcal{D}$;

(b) ak $X, Y \in \mathcal{D}$, tak aj $X \cap Y \in \mathcal{D}$.

Miesto názvu *filter* sa niekedy používa názov *duálny ideál.* Podmienky (a), (b) majú za následok, že pre ľubovoľné $X, Y \subseteq I$ platí $X \cap Y \in \mathcal{D}$ práve vtedy, keď zároveň $X \in \mathcal{D}$ a $Y \in \mathcal{D}$.

Zrejme každý filter obsahuje celú množinu I a jednoprvková množina $\mathcal{D} = \{I\}$ je najmenší zo všetkých filtrov na množine I – hovoríme mu *triviálny filter.* Aj systém všetkých podmnožín $\mathcal{P}(I)$ množiny I tvorí filter na I – hovoríme mu *nevlastný filter.* Ostatné filtre nazývame *vlastné.* Zrejme filter $\mathcal{D}$ je vlastný práve vtedy, keď $\emptyset \notin \mathcal{D}$. Niektorí autori pod pojmom filter rozumejú iba vlastný filter. Trochu všeobecnejšie, pre každú množinu $J \subseteq I$ je

$$\mathcal{P}_J(I) = \{X \subseteq I : J \subseteq X\}$$

filtrom na množine I; takéto filtre nazývame *hlavné filtre.* Zrejme na konečnej množine I sú všetky filtre hlavné. Na nekonečnej množine však existujú aj *nehlavné filtre*, t. j. také, ktoré nemajú najmenší prvok. Príkladom je tzv *Frechetov filter*

$$\mathcal{F}(I) = \{X \subseteq I \colon \text{množina } I \smallsetminus X \text{ je konečná}\}$$

Zrejme pre konečnú množinu I splýva Frechetov filter $\mathcal{F}(I)$ s nevlastným filtrom $\mathcal{P}(I)$. Ak je však I nekonečná, tak $\mathcal{F}(I)$ je netriviálny, vlastný a nehlavný filter na I.

Ďalšie príklady filtrov poskytujú topologické resp. merateľné priestory. V topologickom priestore $(X, \mathcal{T})$ tvorí pre každý bod $x \in X$ množina

$$\mathcal{V}(x) = \{V \subseteq X \colon (\exists U \in \mathcal{T})(x \in U \subseteq V)\}$$

filter na množine X nazývaný *filtrom okolí* bodu x.

Podobne, ak $\mathbf{X} = (X, \mathcal{B}, \mu)$ je merateľný priestor s úplnou mierou μ (t. j. pre ľubovoľné $A, B \subseteq X$ z podmienok $A \subseteq B \in \mathcal{B}$ a $\mu(B) = 0$ vyplýva $A \in \mathcal{B}$ a $\mu(A) = 0$), tak množina

$$\mathcal{Z}(\mathbf{X}) = \{A \subseteq X \colon \mu(X \smallsetminus A) = 0\}$$

tvorí filter na X.

Filter $\mathcal{D}$ na množine I nazývame *ultrafiltrom*, ak $\mathcal{D}$ je vlastný filter a pre ľubovoľnú množinu $X \subseteq I$ platí $X \in \mathcal{D}$ alebo $I \smallsetminus X \in \mathcal{D}$ (pre vlastný filter môže nastať iba jedna z týchto dvoch možností). Zrejme pre ľuboľný prvok $i \in I$ je hlavný filter

$$\mathcal{P}_{\{i\}}(I) = \{X \subseteq I \colon i \in X\}$$

ultrafiltrom na množine I. Nás však zaujímaju najmä nehlavné ultrafiltre – také však môžu existovať len na nekonečných množinách. Zrejme to musia byť ultrafiltre, ktoré rozširujú Frechetov filter $\mathcal{F}(I)$.

Samostatne si premyslite, že filter $\mathcal{D}$ na množine I je ultrafilter práve vtedy, keď je to maximálny vlastný filter na I. Z axiómy výberu, presnejšie z jej ekvivalentnej formulácie v tvare Zornovej lemy alebo Hausdorffovho princípu maximality tak vyplýva nasledujúci výsledok. Systém podmnožín $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(I)$ množiny I nazývame *centrovaný*, ak pre ľubovoľný konečný počet množín $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{S}$ platí $X_1 \cap \ldots \cap X_n \neq \emptyset$.

3.2.1 Tvrdenie. *Nech $\mathcal{S}$ je ľubovoľný centrovaný systém podmnožín množiny I. Potom existuje ultrafilter $\mathcal{E}$ na I taký, že $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{E}$. špeciálne, pre ľubovoľný vlastný filter $\mathcal{D}$ na množine I existuje ultrafilter $\mathcal{E}$ na I taký, že $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$.*

Intuitívne sa na (vlastný) filter $\mathcal{D}$ na množine I pozeráme ako na systém množín, ktoré sú z istého hľadiska „veľké“, preto ich príslušný filter „zachytí“. Pritom takýchto hľadísk môže byť mnoho – každý (vlastný) filter predstavuje jednu z možností. Ak má byť však takéto hľadisko „rozumné“, určite musí spĺňať podmienku (a); podmienka (b) vyjadruje idealizujúcu požiadavku, že doplnok „veľkej“ množiny musí byť „malý“, pričom zjednotenie dvoch „malých“ množín by mala byť opäť „malá“ množina.

3.3 Filtrované súčiny

Základná myšlienka konštrukcie filtrovaného súčinu spočíva v istom oslabení požiadaviek na rovnosť funkcií v priamom súčine a na ich zaradenie do relácií zodpovedajúcich relačným symbolom príslušného jazyka. Funkcie z priameho súčinu, ktoré sa rovnajú na „veľkej“ podmnožine indexovej množiny, stotožníme, a na zaradenie nejakej n-tice funkcií do príslušnej relácie postačí, ak sú jednotlivé zložky prvkov tejto n-tice v príslušných reláciách na jednotlivých činiteľoch pre „veľkú“ množinu indexov. Presnejší popis celej konštrukcie nasleduje.

Nech $(A_i)_{i\in I}$ je systém množín a $\mathcal{D}$ je filter na množine I. Pre ľubovoľné funkcie $\alpha, \beta \in \prod A_i$ položíme

$$\alpha \equiv_{\mathcal{D}} \beta \;\Leftrightarrow\; [\alpha = \beta] \in \mathcal{D}$$

Z vlastností filtra a booleovskej pravdivostnej hodnoty okamžite vyplýva, že $\equiv_{\mathcal{D}}$ je relácia ekvivalencie na množine $\prod_{i\in I} A_i$. Faktorovú množinu $\prod_{i\in I} A_i/\equiv_{\mathcal{D}}$ budeme značiť

$$\prod_{i\in I} A_i\Big/\mathcal{D} \quad \text{alebo len} \quad \prod A_i\Big/\mathcal{D}$$

a nazývať *filtrovaným* alebo *redukovaným súčinom* systému množín $(A_i)_{i\in I}$ podľa filtra $\mathcal{D}$. Triedu ekvivalencie funkcie $\alpha \in \prod A_i$ značíme $\alpha^{\mathcal{D}}$. Zrejme priradením $\alpha \mapsto \alpha^{\mathcal{D}}$ je určené kanonické surjektívne zobrazenie $\prod_{i\in I} A_i \to \prod_{i\in I} A_i/\mathcal{D}$ priameho súčinu $\prod A_i$ na filtrovaný súčin $\prod A_i/\mathcal{D}$.

Ak $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ je systém štruktúr prvého rádu, tak *filtrovaným* alebo tiež *redukovaným súčinom* tohto systému nazývame štruktúru

$$\widetilde{\mathcal{A}}/\mathcal{D} = \prod_{i\in I} \mathcal{A}_i\Big/\mathcal{D}$$

so základnou množinou $\prod_{i\in I} A_i/\mathcal{D}$, na ktorej sú špecifické symboly príslušného jazyka L interpretované takto:

$$f^{\widetilde{\mathcal{A}}/\mathcal{D}}\big(\alpha_1^{\mathcal{D}}, \dots, \alpha_n^{\mathcal{D}}\big) = f^{\widetilde{\mathcal{A}}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^{\mathcal{D}}$$

$$\big(\alpha_1^{\mathcal{D}}, \dots, \alpha_n^{\mathcal{D}}\big) \in r^{\widetilde{\mathcal{A}}/\mathcal{D}} \;\Leftrightarrow\; [r(\alpha_1, \dots, \alpha_n)] \in \mathcal{D}$$

pre ľubovoľný n-árny funkcionálny symbol n resp. n-árny relačný symbol r a všetky $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \widetilde{A} = \prod A_i$.

Vlastnosti filtrov a booleovskej pravdivostnej hodnoty zaručujú, že uvedené definície sú korektné, teda nezávisia od jednotlivých reprezentantov α_k tried ekvivalencie $\alpha_k^{\mathcal{D}}$ pre $k = 1, \ldots, n$. (Rozmyslite si samostatne.) Kanonické zobrazenie $\prod A_i \to \prod A_i/\mathcal{D}$ dané priradením $\alpha \mapsto \alpha^{\mathcal{D}}$ je potom homomorfizmom priameho súčinu $\prod \mathcal{A}_i$ na redukovaný súčin $\prod \mathcal{A}_i/\mathcal{D}$.

Ak $J \subseteq I$ a $\mathcal{D} = \mathcal{P}_J(I)$ je hlavný filter, tak priradenie $\alpha \mapsto \alpha \restriction J$, ktoré každú funkciu $\alpha \in \prod_{i \in I} A_i$ zobrazí na jej zúženie $\alpha \restriction J \in \prod_{i \in J} A_i$, má tu vlatnosť, že

$$\alpha \restriction J = \beta \restriction J \quad \Leftrightarrow \quad J \subseteq [\alpha = \beta] \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \equiv_{\mathcal{D}} \beta$$

pre ľubovoľné $\alpha, \beta \in \prod A_i$. Teda priradením $\alpha^{\mathcal{D}} \mapsto \alpha \restriction J$ je definované bijektívne zobrazenie $\prod_{i \in I} A_i/\mathcal{D} \to \prod_{i \in J} A_i$. Čitateľ by si mal samostatne premyslieť, že to je dokonca izomorfizmus filtrovaného súčinu $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i \big/ \mathcal{D}$ na priamy súčin $\prod_{i \in J} \mathcal{A}_i$. V niektorých špeciálnych prípadoch dostávame

$$\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i \Big/ \mathcal{D} \cong \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i \qquad \text{pre triviálny filter } \mathcal{D} = \{I\}$$

$$\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i \Big/ \mathcal{D} \cong \mathcal{A}_j \qquad \text{pre hlavný ultrafilter } \mathcal{D} = \{X \subseteq I \colon j \in X\}$$

$$\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i \Big/ \mathcal{D} \cong \prod_{i \in \emptyset} \mathcal{A}_i \qquad \text{pre nevlastný filter } \mathcal{D} = \mathcal{P}(I)$$

Každopádne je však jasné, že redukované súčiny možu priniesť niečo nové v porovnaní s priamymi súčinmi jedine v prípade nehlavných filtrov.

Filtrovanou alebo *redukovanou mocninou* štruktúry $\mathcal{A}$ s množinou indexov I podľa filtra $\mathcal{D}$ na I nazývame filtrovaný súčin

$$\mathcal{A}^I/\mathcal{D} = \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i \Big/ \mathcal{D}$$

v ktorom $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}$ pre každé $i \in I$. Priradenie $a \mapsto \overline{a}^{\mathcal{D}}$, ktoré zobrazí každý prvok $a \in A$ na triedu ekvivalencie $\overline{a}^{\mathcal{D}} \in A^I/\mathcal{D}$ konštantnej funkcie $\overline{a} \in A^I$, nazývame *diagonálnym zobrazením* množiny A do jej filtrovanej mocniny $A^I/\mathcal{D}$. Z vlastností filtrov a booleovskej pravdivostnej hodnoty okamžite vyplýva nasledujúce pozorovanie. Dôkaz prenechávame čitateľovi.

3.3.1 Tvrdenie. *Nech $\mathcal{A}$ je štruktúra a $\mathcal{D}$ je vlastný filter na neprázdnej množine I. Potom diagonálne zobrazenie $A \to A^I/\mathcal{D}$ je vnorením štruktúry $\mathcal{A}$ do jej filtrovanej mocniny $\mathcal{A}^I/\mathcal{D}$, čiže $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}^I/\mathcal{D}$.*

3.3.2 Príklad. (a) Filtrovaná mocnina $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{F}$ podľa Frechetovho $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{N})$ filtra pozostáva z tried ekvivalencie $\alpha^{\mathcal{F}}$ všetkých reálnych postupností $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, pričom postupnosti α, β predstavujú tú istú triedu ekvivalencie práve vtedy, keď sa rovnajú „skoro všade“, t. j. všade nanajvýš s výnimkou prvkov $n \in \mathbb{N}$ nejakej konečnej množiny.

(b) Nech $\mathbf{X} = (X, \mathcal{B}, \mu)$ je merateľný priestor s úplnou mierou μ a $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(\mathbf{X})$ je filter na X pozostávajúci zo všetkých množín $A \subseteq X$, ktorých doplnok má mieru 0. Potom filtrovaná mocnina $\mathbb{R}^X/\mathcal{Z}$ pozostáva z tried ekvivalencie $\alpha^{\mathcal{Z}}$ všetkých reálnych funkcií $\alpha : X \to \mathbb{R}$, pričom funkcie α, β predstavujú tú istú triedu ekvivalencie práve vtedy, keď sa rovnajú „skoro všade“, t. j. všade nanajvýš s výnimkou prvkov $x \in B$ nejakej množiny $B \in \mathcal{B}$ miery 0.

Úloha. (Frayne-Morel-Scott) (a) Nech $K \neq \emptyset$ a $(I_k)_{k\in K}$ je systém neprázdnych po dvoch disjunktnýchch množín a $I = \bigcup_{k\in K} I_k$. Nech ďalej $(A_i)_{i\in I}$ je systém neprázdnych množín. Zobrazenie h z priameho súčinu $\prod_{i\in I} A_i$ do iterovaného priameho súčinu $\prod_{k\in K}\Bigl(\prod_{i\in I_k} A_i\Bigr)$ je dané predpisom

$$h(\alpha)(k) = \alpha \restriction I_k$$

pre $\alpha \in \prod_{i\in I} A_i$, $k \in K$. Dokážte, že h je bijektívne zobrazenie. Za predpokladu, že $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ je systém štruktúr jazyka L dokážte, že

$$h\colon \prod_{i\in I} \mathcal{A}_i \longrightarrow \prod_{k\in K}\Bigl(\prod_{i\in I_k} \mathcal{A}_i\Bigr)$$

je izomorfizmus L-štruktúr.

(b) Nech ďalej $\mathcal{E}$ je filter na množine K a pre každé $k \in K$ nech $\mathcal{D}_k$ je filter na množine I_k. Položme $I = \bigcup_{k\in K} I_k$ a

$$\mathcal{D} = \bigl\{X \subseteq I\colon \{k \in K\colon X \cap I_k \in \mathcal{D}_k\} \in \mathcal{E}\bigr\}$$

Dokážte, že $\mathcal{D}$ je filter na množine I.

(c) Dokážte, že $\mathcal{D}$ je ultrafilter práve vtedy, keď $\mathcal{E}$ je ultrafilter a

$$\{k \in K\colon \mathcal{D}_k \text{ je ultrafilter}\} \in \mathcal{E}$$

(d) S využitím zobrazenia h z (a) zostrojte prirodzenú bijekciu medzi filtrovaným súčinom $\prod_{i\in I} A_i/\mathcal{D}$ a iterovaným filtrovaným súčinom

$$\prod_{k\in K}\Bigl(\prod_{i\in I_k} A_i/\mathcal{D}_k\Bigr)\Big/\mathcal{E}$$

(e) Nech $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ je systém štruktúr jazyka L. Dokážte, že bijekcia popísaná v (d) je izomorfizmom L-štruktúr

$$\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i/\mathcal{D} \longrightarrow \prod_{k\in K}\Bigl(\prod_{i\in I_k} \mathcal{A}_i/\mathcal{D}_k\Bigr)\Big/\mathcal{E}$$

3.4 Ultraprodukty

Ultraproduktom systému $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ štruktúr prvého rádu nazývame redukovaný súčin

$$\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i \Big/ \mathcal{D}$$

tohto systému podľa nejakého ultrafiltra $\mathcal{D}$ na množine I. Keďže pre hlavný ultrafilter $\mathcal{D} = \mathcal{P}_{\{j\}}(I)$ platí $\prod \mathcal{A}_i/\mathcal{D} \cong \mathcal{A}_j$, budeme sa zaujímať hlavne o ultraprodukty podľa nehlavných ultrafiltrov. Také môžu existovať iba na nekonečných množinách. Zrejme ultrafilter $\mathcal{D}$ na nekonečnej množine I je nehlavný práve vtedy, keď je rozšírením Frechetovho filtra, t. j. platí preň $\mathcal{F}(I) \subseteq \mathcal{D}$.

Spĺňanie formúl v ultraproduktoch možno plne charakterizovať pomocou ich booleovských pravdivostných hodnôt.

3.4.1 Łośova veta. *Nech $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ je systém štruktúr a $\mathcal{D}$ je ultrafilter na množine I. Potom pre ľubovoľnú formulu $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ a prvky $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \prod A_i$ platí*

$$\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i \Big/ \mathcal{D} \vDash \varphi\big(\alpha_1^{\mathcal{D}}, \dots, \alpha_n^{\mathcal{D}}\big) \quad \Leftrightarrow \quad [\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)] \in \mathcal{D}$$

Inak povedané, n-tica prvkov $\alpha_1^{\mathcal{D}}, \dots, \alpha_n^{\mathcal{D}} \in \prod A_i/\mathcal{D}$ spĺňa formulu φ v ultraprodukte $\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i/\mathcal{D}$ práve vtedy, keď booleovská pravdivostná hodnota $[\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)]$ je „veľká“ v zmysle ultrafiltra $\mathcal{D}$, to znamená práve vtedy, keď n-tica funkcií $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \prod A_i$ spĺňa po zložkách formulu φ pre „veľkú“ množinu indexov $i \in I$.

Dôkaz. Dôkaz možno vykonať jednoducho indukciou podľa zložitosti formuly φ.

Ak φ je atomická, tak platnosť uvedenej ekvivalencie vyplýva z definície operácií a relácií vo filtrovaných súčinoch. Predpokladajme teda, že uvedená ekvivalencia platí pre formuly $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, $\psi(x_1, \dots, x_n)$ a ľubovoľné prvky $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \prod A_i$. Za tohto predpokladu overíme jej platnosť aj pre formuly $\neg\varphi$ a $\varphi \wedge \psi$.

Za uvedených predpokladov pre ľubovoľné $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \prod A_i$ nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

$$\begin{gathered}
\prod \mathcal{A}_i \Big/ \mathcal{D} \vDash \neg\varphi\big(\alpha_1^{\mathcal{D}}, \dots, \alpha_n^{\mathcal{D}}\big) \\
\prod \mathcal{A}_i \Big/ \mathcal{D} \nvDash \varphi\big(\alpha_1^{\mathcal{D}}, \dots, \alpha_n^{\mathcal{D}}\big) \\
[\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)] \notin \mathcal{D} \\
[\neg\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)] = I \smallsetminus [\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)] \in \mathcal{D}
\end{gathered}$$

Pritom ekvivalencia podmienok v druhom a treťom riadku je zaručená indukčným predpokladom a ekvivalencia podmienok v treťom a štvrtom riadku vlastnosťami booleovskej pravdivostnej hodnoty a ultrafiltrov.

Podobne, pre ľubovoľné $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \prod A_i$ nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

$$\prod \mathcal{A}_i \Big/ \mathcal{D} \vDash (\varphi \wedge \psi)\big(\alpha_1^{\mathcal{D}}, \dots, \alpha_n^{\mathcal{D}}\big)$$
$$\prod \mathcal{A}_i \Big/ \mathcal{D} \vDash \varphi\big(\alpha_1^{\mathcal{D}}, \dots, \alpha_n^{\mathcal{D}}\big) \ \wedge \ \prod \mathcal{A}_i \Big/ \mathcal{D} \vDash \psi\big(\alpha_1^{\mathcal{D}}, \dots, \alpha_n^{\mathcal{D}}\big)$$
$$[\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)] \in \mathcal{D} \ \wedge \ [\psi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)] \in \mathcal{D}$$
$$[(\varphi \wedge \psi)(\alpha_1, \dots, \alpha_n)] = [\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)] \cap [\psi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)] \in \mathcal{D}$$

Pritom ekvivalencia podmienok v druhom a treťom riadku je zaručená indukčným predpokladom a ekvivalencia podmienok v treťom a štvrtom riadku vlastnosťami booleovskej pravdivostnej hodnoty a ľubovoľných filtrov.

Predpokladajme ďalej, že uvedená ekvivalencia platí pre formulu $\varphi(x, x_1, \dots, x_n)$ a ľubovoľné prvky $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \prod A_i$. Za tohto predpokladu overíme jej platnosť aj pre formulu $(\exists\, x)\varphi(x, x_1, \dots, x_n)$. Za uvedených predpokladov pre ľubovoľné $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \prod A_i$ sú nasledujúce podmienky ekvivalentné:

$$\prod \mathcal{A}_i \Big/ \mathcal{D} \vDash (\exists\, x)\varphi\big(x, \alpha_1^{\mathcal{D}}, \dots, \alpha_n^{\mathcal{D}}\big)$$
$$\Big(\exists\, \alpha \in \prod A_i\Big)\Big(\prod \mathcal{A}_i \Big/ \mathcal{D} \vDash \varphi\big(\alpha^{\mathcal{D}}, \alpha_1^{\mathcal{D}}, \dots, \alpha_n^{\mathcal{D}}\big)\Big)$$
$$\Big(\exists\, \alpha \in \prod A_i\Big)\big([\varphi(\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n)] \in \mathcal{D}\big)$$
$$[(\exists\, x)\varphi(x, \alpha_1, \dots, \alpha_n)] \in \mathcal{D}$$

Pritom ekvivalencia podmienok v druhom a treťom riadku je zaručená indukčným predpokladom a ekvivalencia podmienok v treťom a štvrtom riadku princípom maxima pre booleovskú pravdivostnú hodnotu a a vlastnosťami ľubovoľných filtrov.

Všimnite si, že indukčné kroky pre konjunkciu a existenčný kvantifikátor by prešli pre ľubvoľný filter $\mathcal{D}$; podmienku, že $\mathcal{D}$ je ultrafilter, sme potrebovali iba v indukčnom kroku pre negáciu.

Bezprostredným dôsledkom Łośovej vety je fakt, že ultraprodukt modelov ľubovoľnej teórie prvého rádu je sám modelom tejto teórie.

3.4.2 Dôsledok. *Nech T je teória prvého rádu, $\mathcal{D}$ je ultrafilter na množine I a $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ je systém štruktúr taký, že $\mathcal{A}_i \vDash T$ pre každé $i \in I$. Potom tiež*

$$\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i \Big/ \mathcal{D} \vDash T$$

3.4.3 Dôsledok. *Nech $\mathcal{A}$ je štruktúra prvého rádu a $\mathcal{D}$ je ultrafilter na množine I. Potom diagonálne zobrazenie $a \mapsto \overline{a}^{\mathcal{D}}$ je elementárnym vnorením $\mathcal{A} \xrightarrow{\preceq} \mathcal{A}^I/\mathcal{D}$ štruktúry $\mathcal{A}$ do jej ultramocniny $\mathcal{A}^I/\mathcal{D}$.*

Dôkaz. Stačí overiť, že pre ľubovoľnú formulu $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ a prvky $a_1, \dots, a_n \in A$ z podmienky $\mathcal{A} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n)$ vyplýva, že $\mathcal{A}^I/\mathcal{D} \vDash \varphi\big(\overline{a}_1^{\mathcal{D}}, \dots, \overline{a}_n^{\mathcal{D}}\big)$. Za uvedeného predpokladu však platí $[\varphi(\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_n)] = I \in \mathcal{D}$, teda požadovaný záver vyplýva z Łośovej vety.

3.5 Neštandardná analýza

Konštrukcia ultramocniny umožňuje rozšíriť obor reálnych čísel do číselného systému, ktorý obsahuje „nekonečne malé“ aj „nekonečne veľké“ veličiny a využiť ich pri budovaní infinitezimálneho, t. j. diferenciálneho a integrálneho počtu v poňatí blízkom jeho historicky pôvodnej podobe, akú mu vtlačili jeho zakladatelia Isaac Newton a Gotfried Wilhelm Leibniz. Matematická disciplína, ktorá s využitím metód matematickej logiky a teórie modelov skúma rôzne klasické matematické štruktúry pomocou ich elementárnych rozšírení, kde sú obohatené o rôzne typy ideálnych prvkov, sa nazýva *neštandardná analýza*. Jej základy položil v 60. rokoch 20. storočia Abraham Robinson. „Neštandardné metódy“ sa v súčasnosti používajú v rôznych oblastiach matematiky, napr. v teórii miery a pravdepodobnosti, v topológii, funkcionálnej analýze, v ergodickej teórii, dynamických systémoch atď., takže rehabilitáciou pôvodného infinitezimálneho počtu sa význam neštandardnej analýzy ani zďaleka nevyčerpáva. V tejto krátkej ukážke však naznačíme iba niekoľko jej základnych myšlienok, týkajúcich sa práve infinitezimálneho počtu reálnych funkcií jednej reálnej premennej.

Kvôli konkrétnosti si za indexovú množinu I zvolíme množinu všetkých kladných celých čísel, teda $I = \{1, 2, 3, \dots\}$; jej úlohu by však mohla zohrať ľubovoľná nekonečná množina. Ďalej nech $\mathcal{D}$ je ľubovoľný nehlavný ultrafilter na množine I; to znamená, že platí $\mathcal{F}(I) \subseteq \mathcal{D}$. Pre ľubovoľnú štruktúru $\mathcal{A}$ akéhokoľvek jazyka prvého rádu L budeme jej ultramocninu $\mathcal{A}^I/\mathcal{D}$ značiť ${}^*\mathcal{A}$. Špeciálne pre množinu A kladieme ${}^*A = A^I/\mathcal{D}$ a každý prvok $a \in A$ stotožníme s jeho obrazom $\overline{a}^{\mathcal{D}}$ v diagonálnom vnorení $A \to {}^*A$.

Množinu ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^I/\mathcal{D}$ nazývame množinou všetkých *hyperreálnych čísel*. Podobne možno zaviesť *hyperprirodzené, hypercelé, hyperracionálne* či *hyperkomplexné čísla*. Dohodneme sa, že $L = (F, R, \nu)$ je jazyk prvého rádu, ktorého špecifické symboly zahŕňaju typické znaky pre operácie sčítania $+$ a násobenia $\cdot$, konštanty 0 a 1, relácie usporiadania $<$ aj $\leq$, ako aj obvyklé znaky pre všetky funkcie, operácie, konštanty a relácie bežne používané v matematickej analýze, napr. funkcie absolútna hodnota $|x|$, exponenciála e^x, sinus $\sin x$, kosinus $\cos x$, operácie delenia x/y, umocňovania x^y, konštanty π, e, jednomiestne predikáty $\mathbb{Z}(x)$ „byť celým číslom“, $\mathbb{Q}(x)$ „byť racionálnym číslom“, $\mathbb{R}^+(x)$ „byť kladným (reálnym) číslom“ a pod. Potom $\mathcal{R}$ označuje L-štruktúru so základnou množinou $\mathbb{R}$, v ktorej sú všetky špecifické symboly jazyka L interpretované prirodzeným (t. j. štandardným) spôsobom. Ultramocninu

$$ {}^*\mathcal{R} = \mathcal{R}^I/\mathcal{D} $$

nazývame *neštandardným rozšírením* štruktúry $\mathcal{R}$. Kým intrepretácie špecifických symbolov jazyka L v štruktúre $\mathcal{R}$ budeme značiť príslušným symbolom samotným, interpretáciu symbola s v štruktúre ${}^*\mathcal{R}$ budeme značiť ${}^*s$. Keď nehrozí nedorozumenie, budeme najmä pri symboloch s ustáleným významom, ako napr. $+$, $\cdot$, 0, 1, π, e, $|x|$, $\sin x$, $\cos x$, $<$ a pod., túto hviezdičku vynechávať. O každej funkcii $f\colon P \to \mathbb{R}$, ktorú hodláme študovať, budeme predpokladať, že f aj jej definičný obor $P \subseteq \mathbb{R}$ „majú mená“ vyjadrené špecifickými symbolmi, či aspoň termami alebo formulami jazyka L. Takejto funkcii potom zodpovedá funkcia ${}^*f\colon {}^*P \to {}^*\mathbb{R}$, ktorá spĺňa podmienky $P \subseteq {}^*P \subseteq {}^*\mathbb{R}$ a ${}^*f(x) = f(x)$ pre $x \in P$. Keďže $\mathcal{R} \prec {}^*\mathcal{R}$, ${}^*f$ má v istom dobre definovanom zmysle „rovnaké vlastnosti“ ako pôvodná funkcia f.

Zúžením štruktúr $\mathcal{R}$ a ${}^*\mathcal{R}$ do jazyka so špecifickými symbolmi $+$, $\cdot$, 0, 1 a $<$ dostávame usporiadané polia $\mathcal{R}_0 = (\mathbb{R}; +, \cdot, 0, 1, <)$ a ${}^*\mathcal{R}_0 = ({}^*\mathbb{R}; +, \cdot, 0, 1, <)$, pričom stále platí $\mathcal{R}_0 \prec {}^*\mathcal{R}_0$. Usporiadané pole ${}^*\mathcal{R}_0$ však obsahuje „nekonečne veľké“ a „nekonečne malé“ čísla (veličiny). Hovoríme, že hyperreálne číslo $x \in {}^*\mathbb{R}$ je *konečne veľké*, prípadne tiež *ohraničené* alebo len *konečné*, ak existuje kladné reálne číslo $r \in \mathbb{R}$ také, že $|x| < r$. V opačnom prípade hovoríme, že x je *nekonečne veľké*, prípadne tiež *neohraničené* alebo len *nekonečné* hyperreálne číslo. Hovoríme, že hyperreálne číslo $x \in {}^*\mathbb{R}$ je *nekonečne malé* alebo tiež *infinitezimálne*, ak pre každé kladné reálne číslo $r \in \mathbb{R}$ platí $|x| < r$. Ľahko možno nahliadnuť, že množina

$$\mathbb{F}^*\mathbb{R} = \big\{x \in {}^*\mathbb{R} \colon (\exists\, r \in \mathbb{R}^+)(|x| < r)\big\}$$

všetkých konečných hyperreálnych čísel tvorí *konvexný podokruh*[1] usporiadaného poľa ${}^*\mathcal{R}_0$. Množina

$$\mathbb{I}^*\mathbb{R} = \big\{x \in {}^*\mathbb{R} \colon (\forall\, r \in \mathbb{R}^+)(|x| < r)\big\}$$

všetkých nekonečne malých hyperreálnych čísel tvorí *konvexný ideál* usporiadaného okruhu $(\mathbb{F}^*\mathbb{R}; +, \cdot, 0, 1, <)$.

Čitateľ by si mal samostatne rozmyslieť, že pre postupnosť $\alpha = (1, 2, 3, \dots) \in \mathbb{R}^I$, t. j. $\alpha(i) = i$ pre $i \in I$, platí $\alpha^{\mathcal{D}} \in {}^*\mathbb{R} \setminus \mathbb{F}^*\mathbb{R}$, to znamená, že $\alpha^{\mathcal{D}}$ je kladné nekonečne veľké hyperreálne číslo. Na druhej strane, pre postupnosť $\beta = (1, 1/2, 1/3, \dots) \in \mathbb{R}^I$, t. j. $\beta(i) = 1/i$ pre $i \in I$, platí $0 \neq \beta^{\mathcal{D}} \in \mathbb{I}^*\mathbb{R}$, teda $\beta^{\mathcal{D}}$ je kladné nekonečne malé hyperreálne číslo. Vo všeobecnosti platí, že hyperreálne číslo x je nekonečne veľké práve vtedy, keď jeho prevrátená hodnota $1/x$ je nekonečne malá.

Keďže množina $\mathbb{I}^*\mathbb{R}$ nekonečne malých čísel tvorí zároveň podgrupu abelovskej grupy $({}^*\mathbb{R}; +, 0)$, vzťahom

$$x \approx y \;\Leftrightarrow\; x - y \in \mathbb{I}^*\mathbb{R}$$

je definovaná relácia ekvivalencie na množine ${}^*\mathbb{R}$ nazývaná *reláciou* alebo *ekvivalenciou nekonečnej blízkosti*. Množinu

$$\mu(x) = x + \mathbb{I}^*\mathbb{R} = \{y \in {}^*\mathbb{R} \colon y \approx x\}$$

všetkých hyperreálnych čísel nekonečne blízkych k číslu (bodu) $x \in {}^*\mathbb{R}$ nazývame zhodne s Leibnizom *monádou* čísla (bodu) x. Zrejme $\mu(0) = \mathbb{I}^*\mathbb{R}$ a každá monáda $\mu(x)$ je konvexná podmnožina množiny ${}^*\mathbb{R}$.

Ku každému *konečnému* hyperreálnemu číslu x existuje práve jedno (štandardné) reálne číslo r také, že $x \approx r$; toto reálne číslo nazývame *štandardnou časťou* alebo *tieňom* čísla x a značíme ho

$$r = \operatorname{st} x = {}^\circ x$$

Pre čitateľa s istými vedomosťami z topológie dodávame, že pre $x \in \mathbb{F}^*\mathbb{R}$ určené postupnosťou $\xi \in \mathbb{R}^I$, t. j. $x = \xi^{\mathcal{D}}$, platí ${}^\circ x = r$ práve vtedy, keď postupnosť ξ konverguje

[1] Podmnožinu X čiastočne usporiadanej množiny $(A; <)$ nazývame *konvexnou*, ak pre ľubovoľné $x, y, z \in A$ platí $(x, z \in X \wedge x < y < z) \Rightarrow y \in X$.

k bodu r *podľa ultrafiltra* $\mathcal{D}$.[2] Z toho vyplýva, že konvergencia

$$\lim_{i\to\infty} \xi(i) = r$$

v „bežnom" význame (t. j. podľa Frechetrovho filtra $\mathcal{F}(I)$) je postačujúcou (nie však nutnou) podmienkou pre rovnosť $^\circ x = r$.

Z našich úvah vyplýva, že faktorová množina $\mathbb{F}^*\mathbb{R}/\mathbb{I}^*\mathbb{R} = \mathbb{F}^*\mathbb{R}/{\approx}$ je tvorená monádami $\mu(x)$ ohraničených hyperreálnych čísel $x \in \mathbb{F}^*\mathbb{R}$. Faktorizáciou usporiadného okruhu $(\mathbb{F}^*\mathbb{R}; +, \cdot, 0, 1, <)$ podľa jeho konvexného ideálu $\mathbb{I}^*\mathbb{R}$ tak opäť dostaneme usporiadaný okruh $(\mathbb{F}^*\mathbb{R}/\mathbb{I}^*\mathbb{R}; +, \cdot, 0, 1, <)$. Špeciálne pre usporiadanie v tomto okruhu platí

$$\mu(x) < \mu(y) \;\Leftrightarrow\; (x < y \;\wedge\; x \not\approx y)$$

Navyše priradením $\mu(x) \mapsto \operatorname{st} x$ je korektne definovaný izomorfizmus usporiadaných okruhov $(\mathbb{F}^*\mathbb{R}/\mathbb{I}^*\mathbb{R}; +, \cdot, 0, 1, <) \cong (\mathbb{R}; +, \cdot, 0, 1, <)$, z ktorého okrem iného vyplýva, že $(\mathbb{F}^*\mathbb{R}/\mathbb{I}^*\mathbb{R}; +, \cdot, 0, 1, <)$ je usporiadané pole.

Podobne možno zaviesť aj množiny všetkých konečných hyperracionálnych čísel $\mathbb{F}^*\mathbb{Q}$ a nekonečne malých hyperracionálnych čísla $\mathbb{I}^*\mathbb{Q}$ a vytvoriť faktorový usporiadaný okruh $(\mathbb{F}^*\mathbb{Q}/\mathbb{I}^*\mathbb{Q}; +, \cdot, 0, 1, <)$. Skúste si samostatne premyslieť, ktorá z dvoch možností

$$(\mathbb{F}^*\mathbb{Q}/\mathbb{I}^*\mathbb{Q}; +, \cdot, 0, 1, <) \cong (\mathbb{Q}; +, \cdot, 0, 1, <)$$

resp.

$$(\mathbb{F}^*\mathbb{Q}/\mathbb{I}^*\mathbb{Q}; +, \cdot, 0, 1, <) \cong (\mathbb{R}; +, \cdot, 0, 1, <)$$

skutočne nastáva, a zdôvodniť prečo.

Skutočnosť, že usporiadané polia $\mathcal{R}_0 = (\mathbb{R}; +, \cdot, 0, 1, <)$ a $^*\mathcal{R}_0 = (^*\mathbb{R}; +, \cdot, 0, 1, <)$ sú elementárne ekvivalentné, ktorá vyplýva z elementárnej inklúzie $\mathcal{R}_0 \prec {}^*\mathcal{R}$, znamená len toľko, že $\mathcal{R}_0$ a $^*\mathcal{R}_0$ majú rovnaké vlastnosti vyjadriteľné v jazyku usporiadaných polí. Pokiaľ však ide o iné vlastnosti, môžu sa výrazne líšiť. Napr. v $\mathcal{R}_0$ platí veta supreme, teda každá zhora ohraničená množina $X \subseteq \mathbb{R}$ má supremum v $\mathbb{R}$. Na druhej strane, množiny $\mathbb{I}^*\mathbb{R} \subseteq {}^*\mathbb{R}$, $\mathbb{F}^*\mathbb{R} \subseteq {}^*\mathbb{R}$ sú obe ohraničené v $^*\mathbb{R}$ (prvá ľubovoľným kladným číslom $r \in \mathbb{R}$, druhá ľubovoľným nekonečným kladným číslom $z \in {}^*\mathbb{R}$). Ľahko sa však možno presvedčiť, že ani jedna z nich nemá v $^*\mathbb{R}$ supremum. Z faktu, ža štruktúra $^*\mathcal{R}_0$ je elementárnym rozšírením štruktúry $\mathcal{R}_0$ vyplýva existencia suprema len pre všetky zhora ohraničené množinu tvaru $X = \{x \in {}^*\mathbb{R} \colon \varphi(x, a_1, \dots, a_n)\}$, kde $\varphi(x, x_1, \dots, x_n)$ je formula v jazyku usporiadaných polí a $a_1, \dots, a_n \in {}^*\mathbb{R}$. V dôsleku toho vidíme, že množiny $\mathbb{I}^*\mathbb{R}$, $\mathbb{F}^*\mathbb{R}$ sa v takomto tvare vyjadriť nedajú. Podobné úvahy sa vzťahujú aj na bohatší jazyk L a L-štruktúry $\mathcal{R} \prec {}^*\mathcal{R}$.

Nasledujúce tri vety, ktoré uvádzame bez dôkazov, charakterizujú tri základné pojmy matematickej analýzy (spojitosť, deriváciu a určitý integrál) pomocou nekonečne malých a nekonečne veľkých veličín. Zároveň ich však možno chápať ako *definície* uvedených pojmov. V tom prípade by sa však opäť patrilo dokázať, že zodpovedajúce štandardné definície týchto pojmov sú s nimi ekvivalentné. Ponechávame na osobné posúdenie čitateľa, či považuje za intuitívne názornejšie štandardné alebo neštandardné formulácie.

[2] Postupnosť $\alpha\colon I \to \mathbb{R}$ konverguje k reálnemu číslu a podľa filtra $\mathcal{D}$ na množine I, ak pre každé reálne číslo $\varepsilon > 0$ existuje množina $X \in \mathcal{D}$ taká, že $|\alpha(k) - a| < \varepsilon$ pre každé $k \in X$.

3.5.1 Veta. *Nech $P \subseteq \mathbb{R}$ a $f\colon P \to \mathbb{R}$ je ľubovoľná funkcia pomenovaná v jazyku L.*
(a) *f je spojitá v bode $a \in P$ práve vtedy, keď pre všetky $x \in {}^*P$ platí*
$x \approx a \ \Rightarrow\ {}^*f(x) \approx f(a)$
(b) *f je spojitá na množine P práve vtedy, keď pre všetky $a \in P$, $x \in {}^*P$ platí*
$x \approx a \ \Rightarrow\ {}^*f(x) \approx f(a)$
(c) *f je rovnomerne spojitá na množine P práve vtedy, keď pre všetky $x, y \in {}^*P$ platí*
$x \approx y \ \Rightarrow\ {}^*f(x) \approx {}^*f(y)$

Pripomíname, že bod $a \in P$ množiny $P \subseteq \mathbb{R}$ nazývame jej *vnútorným bodom*, ak existuje kladné číslo $\varepsilon \in \mathbb{R}$ také, že $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq P$. Možno dokázať, že $a \in P$ je vnútorným bodom tejto množiny práve vtedy, keď $\mu(a) \subseteq {}^*P$.

3.5.2 Veta. *Nech $P \subseteq \mathbb{R}$ a $f\colon P \to \mathbb{R}$ je ľubovoľná funkcia pomenovaná v jazyku L a $a \in P$ je vnútorný bod množiny P. Potom funkcia f má v bode a konečnú deriváciu práve vtedy, keď existuje reálne číslo r také, že pre každé nekonečné malé číslo $d \neq 0$ platí*

$$\frac{{}^*f(a+d) - f(a)}{d} \approx r$$

V takom prípade píšeme

$$f'(a) = \frac{\mathrm{d}f(a)}{\mathrm{d}x} = r = \mathrm{st}\left(\frac{{}^*f(a+d) - f(a)}{d}\right)$$

a toto číslo nazývame *deriváciou funkcie f v bode a.*

Riemannovský určitý integrál možno definovať pomocou „nekonečných integrálnych súčtov“ zodpovedajúcich *infinitezimálnym deleniam* daného intervalu. Rigorózne zavedenie takýchto súčtov by si vyžiadalo ešte niekoľko jemnejších úvah navyše, ktoré si tentokrát odpustíme. Prvotné predstavy, na ktorých spočívajú nasledujúce pojmy a na nich založená konštrukcia, sú však do značnej miery intuitívne jasné. Stačí, ak poznamenáme, že množinu resp. postupnosť nazývame *hyperkonečnou*, ak jej možno zmysluplne priradiť nejaké hyperprirodzené číslo $n \in {}^*\mathbb{N}$ ako počet jej prvkov resp. členov. Pritom ak $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, tak táto množina resp. postupnosť je v štandardnom zmysle nekonečná. Čísla tvoriace hyperkonečnú postupnosť $(c_1, \dots, c_n) \in {}^*\mathbb{R}^n$ možno navyše sčítať a s ich súčtami $\sum_{i=1}^{n} c_n$ možno narábať v istom dobre definovateľnom zmysle rovnako ako s konečnými súčtami.

Nech $a < b$ sú (štandardné) reálne čísla. *Delením intervalu* $[a, b]$ nazývame hyperkonečnú postupnosť $(c_0, c_1, \dots, c_n)$, kde $n \in {}^*\mathbb{N}$, takú, že $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = b$. Hovoríme, že $(c_0, c_1, \dots, c_n)$ je *infinitezimálne delenie* intervalu $[a, b]$, ak $c_{k-1} \approx c_k$ pre každé $1 \leq k \leq n$. Zrejme ak $(c_0, c_1, \dots, c_n)$ je infinitezimálne delenie intervalu $[a, b]$, tak $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, čiže n je nekonečne veľké hyperprirodzené číslo. *Integrálnym súčtom* prislúchajúcim k deleniu $(c_0, c_1, \dots, c_n)$ nazývame každý súčet tvaru

$$\sum_{k=1}^{n} {}^*f(x_k)(c_k - c_{k-1})$$

kde $(x_1, \dots, x_n)$ je hyperkonečná postupnosť vybraných bodov $x_k \in [c_{k-1}, c_k]$ z jednotlivých dielčích intervalov $[c_{k-1}, c_k] \subseteq [a, b]$.

3.5.3 Veta. *Nech $a < b$ sú reálne čísla a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je ľubovoľná funkcia pomenovaná v jazyku L. Potom funkcia f je riemannovsky integrovateľná na intervale $[a,b]$ práve vtedy, keď existuje reálne číslo S také, že pre všetky infinitezimálne delenia $(c_0, c_1, \dots, c_n)$ intervalu $[a,b]$ a vybrané body $x_k \in [c_{k-1}, c_k]$ pre $1 \le k \le n$ platí*

$$\sum_{k=1}^{n} {}^*f(x_k)(c_k - c_{k-1}) \approx S$$

V takom prípade píšeme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S = \mathrm{st}\left(\sum_{k=1}^{n} {}^*f(x_k)(c_k - c_{k-1})\right)$$

a toto číslo nazývame *určitým integrálom funkcie f na intervale* $[a,b]$. Špeciálne, ak $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, $d = (b-a)/n \approx 0$ a $c_k = a + kd$ pre $0 \le k \le n$, tak $(c_0, c_1, \dots, c_n)$ je *rovnomerné* infinitezimálne delenie intervalu $[a,b]$. V tom prípade pre riemannovsky integrovateľnú funkciu $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ a ľubovoľný výber bodov $x_k \in [c_{k-1}, c_k]$ platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S = \mathrm{st}\left(\sum_{k=1}^{n} {}^*f(x_k)\,d\right) = (b-a)\,\mathrm{st}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {}^*f(x_k)\right)$$

čiže štandardná časť aritmetického priemeru $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {}^*f(x_k)$ predstavuje *strednú hodnotu* funkcie f na intervale $[a,b]$.

Na záver ešte poznamenajme, čo si niektorí pozorní čitatelia všimli možno aj sami. Skutočnosť, že sme štruktúru ${}^*\mathcal{R}$ nad množinou hyperreálnych čísel ${}^*\mathbb{R}$ zostrojili ako ultramocninu ${}^*\mathcal{R} = \mathcal{R}^I/\mathcal{D}$ štruktúry $\mathcal{R}$ nad množinou reálnych čísel $\mathbb{R}$, nehrala totiž v našich úvahách nijako dôležitú úlohu. Dôležitý bol iba fakt, že štruktúra ${}^*\mathcal{R}$ je elementárnym rozšírením štruktúry $\mathcal{R}$, a intuícia a názorné predstavy spojené s pojmami nekonečne malých a nekonečne veľkých čísel. Konštrukcia ultramocniny im poskytla iba akúsi počiatočnú oporu tým, že ich tak povediac „zlegalizovala“ v rámci univerza množín, ktoré sme si zvykli považovať za svet prakticky celej súčasnej matematiky.

3.6 Veta o kompaktnosti v jazyku ultraproduktov

Náš pôvodný dôkaz vety o kompaktnosti vychádzal z vety o úplnosti a bol nekonštruktívny v tom zmysle, že nedával žiadny návod, ako možno z modelov konečných podteórií danej teórie prvého rádu T zostrojiť model samotnej teórie T. Nasledujúca veta nám poskytuje istú predstavu o takejto konštrukcii. Treba si však uvedomiť, že nehlavné ultrafiltre nevieme explicitne popísať a axiómy teórie množín nám zaručujú iba ich existenciu, preto „konštruktívnosť“ dôkazu nasledujúcej vety zostáva aj naďalej značne iluzórna.

3.6.1 Veta. *Nech Σ je množina uzavretých formúl jazyka L uzavretá vzhľadom na konečné konjunkcie a pre každé $\sigma \in \Sigma$ nech $\mathcal{A}_\sigma$ je štruktúra jazyka L taká, že $\mathcal{A}_\sigma \vDash \sigma$. Potom existuje ultrafilter $\mathcal{D}$ nad Σ taký, že*

$$\prod_{\sigma \in \Sigma} \mathcal{A}_\sigma \Big/ \mathcal{D} \vDash \Sigma$$

Dôkaz. Pre každé $\sigma \in \Sigma$ označíme $J_\sigma = \{\varrho \in \Sigma\colon \mathcal{A}_\varrho \models \sigma\}$. Zrejme množina $J_{\sigma_1} \cap \cdots \cap J_{\sigma_n}$ obsahuje formulu $\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n$, takže $\{J_\sigma\colon \sigma \in \Sigma\}$ je centrovaný systém podmnožín množiny Σ. Preto existuje ultrafilter $\mathcal{D}$ na Σ taký, že $J_\sigma \in \mathcal{D}$ pre každé $\sigma \in \Sigma$. Dokážeme, že

$$\prod_{\sigma\in\Sigma} \mathcal{A}_\sigma \Big/ \mathcal{D} \models \sigma$$

pre ľubovoľné $\sigma \in \Sigma$. Stačí si uvedomiť, že

$$[\sigma] = \{\varrho \in \Sigma\colon \mathcal{A}_\varrho \models \sigma\} = J_\sigma \in \mathcal{D}$$

Požadovaný záver vyplýva z Łośovej vety.

3.6 Elementárna ekvivalencia a ultramocniny

Práve dokázaná verzia vety o kompaktnosti umožňuje charakterizovať vzťah elementárnej ekvivalencie štruktúr prostredníctvom elementárnej vnoriteľnosti jednej z nich do ultramocniny druhej z nich.

3.6.1 Veta. *Nech $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sú štruktúry prvého rádu. Potom $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ práve vtedy keď existuje ultramocnina $\mathcal{A}^I/\mathcal{D}$ štruktúry $\mathcal{A}$ a elementárne vnorenie $h\colon \mathcal{B} \xrightarrow{\prec} \mathcal{A}^I/\mathcal{D}$.*

Dôkaz. Nech $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. Položme $\Sigma = \mathrm{Th}(\mathcal{B}_B)$. Zrejme Σ je množina formúl jazyka L_B uzavretá na konečné konjunkcie. Ľubovoľné $\sigma \in \Sigma$ má tvar $\varphi(b_1, \ldots, b_n)$ pre vhodnú formulu $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ jazyka L a $b_1, \ldots, b_n \in B$. Potom $\mathcal{B} \models \varphi(b_1, \ldots, b_n)$, a keďže $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, tak aj

$$\mathcal{A} \models (\exists\, x_1, \ldots, x_n)\varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

Nech $g_\sigma\colon B \to A$ je zobrazenie také, že pre štruktúru $\mathcal{A}_\sigma = \big(\mathcal{A}, g_\sigma(b)\big)_{b\in B}$ jazyka L_B platí

$$\mathcal{A} \models \varphi\big(g_\sigma(b_1), \ldots, g_\sigma(b_n)\big)$$

t. j. $\mathcal{A}_\sigma \models \sigma$. Podľa Vety 3.6.1 o kompaktnosti existuje ultrafiler $\mathcal{D}$ na Σ taký, že

$$\prod_{\sigma\in\Sigma} \mathcal{A}_\sigma \Big/ \mathcal{D} \models \Sigma$$

Potom zúženie tohto ultraproduktu do jazyka L je ultramocnina $\mathcal{A}^\Sigma/\mathcal{D}$ a zobrazenie $h\colon B \to A^\Sigma/\mathcal{D}$, dané predpisom $h(b)(\sigma) = g_\sigma(b)$ pre $b \in B$, $\sigma \in \Sigma$, je elementárnym vnorením $\mathcal{B} \xrightarrow{\prec} \mathcal{A}^\Sigma/\mathcal{D}$.

Obrátená implikácia je triviálna.

Poznamenajme, že prostriedkami presahujúcimi rámec nášho kurzu možno dokázať aj podstatne silnejší výsledok.

3.6.2 Keislerova-Shelahova veta. *Nech $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sú štruktúry prvého rádu. Potom $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ práve vtedy keď existuje množina I a ultrafilter $\mathcal{D}$ na I také, že $\mathcal{A}^I/\mathcal{D} \cong \mathcal{B}^I/\mathcal{D}$.*

3.7 Charakterizácia axiomatických a konečne axiomatizovateľných tried

Triedu všetkých štruktúr jazyka L označujeme $\mathrm{Mod}(L)$. Ak T je teória v jazyku L, tak triedu všetkých jej modelov označujeme $\mathrm{Mod}(T)$, teda

$$\mathrm{Mod}(T) = \{\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(L) \colon \mathcal{A} \vDash T\}$$

Hovoríme, že trieda $\mathbf{K} \subseteq \mathrm{Mod}(L)$ štruktúr jazyka L je *axiomatická trieda*, ak existuje teória T v jazyku L taká, že $\mathbf{K} = \mathrm{Mod}(T)$. Hovoríme, že trieda $\mathbf{K}$ štruktúr jazyka L je *konečne axiomatizovateľná*, ak existuje konečná teória v jazyku L taká, že $\mathbf{K} = \mathrm{Mod}(T)$.

Teóriou triedy $\mathbf{K} \subseteq \mathrm{Mod}(L)$ nazývame množinu $\mathrm{Th}(\mathbf{K})$ všetkých uzavretých formúl jazyka L splnených v každej štruktúre $\mathcal{A} \in \mathbf{K}$, teda

$$\mathrm{Th}(\mathbf{K}) = \big\{\varphi \in \mathrm{Form}(L) \colon \varphi \text{ je uzavretá a } (\forall\, \mathcal{A} \in \mathbf{K})(\mathcal{A} \vDash \varphi)\big\}$$

Nasledujúce dve vety charakterizujú axiomatické a konečne axiomatizovateľné triedy v termínoch ich uzavretosti vzhľadom na vzťahy izomorfizmu, elementárnej ekvivalencie resp. elementárnej podštruktúry a konštrukciu ultraproduktu.

3.7.1 Veta. *Nech* $\mathbf{K}$ *je ľubovoľná trieda štruktúr jazyka* L*. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*
(i) $\mathbf{K}$ *je axiomatická trieda.*
(ii) $\mathbf{K}$ *je uzavretá vzhľadom na izomorfizmus, elementárne podštruktúry a ultraprodukty.*
(iii) $\mathbf{K}$ *je uzavretá vzhľadom na elementárnu ekvivalenciu a ultraprodukty.*

Dôkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) je triválne, (ii) $\Rightarrow$ (iii) vyplýva z predchádzjúcej Vety 3.6.2. Zostáva dokázať jedine (iii) $\Rightarrow$ (i). Nech $\mathbf{K}$ je uzavretá na elementárnu ekvivalenciu a ultraprodukty. Položme $T = \mathrm{Th}(\mathbf{K})$. Zrejme $\mathbf{K} \subseteq \mathrm{Mod}(T)$. Dokážeme obrátenú inklúziu. Nech $\mathcal{B} \in \mathrm{Mod}(T)$. Potom $\Sigma = \mathrm{Th}(\mathcal{B})$ je množina uzavretých formúl jazyka L uzavretá na konečné konjunkcie. Taktiež pre každé $\sigma \in \Sigma$ existuje $\mathcal{A}_\sigma \in \mathbf{K}$ také, že $\mathcal{A}_\sigma \vDash \sigma$. V opačnom prípade by totiž platilo $\neg\sigma \in T$, a preto $\mathcal{B} \vDash \neg\sigma$. Podľa Vety 3.6.1 o kompaktnosti potom existuje ultrafilter $\mathcal{D}$ na množine Σ taký, že $\prod_{\sigma\in\Sigma} \mathcal{A}_\sigma/\mathcal{D} \vDash \Sigma$, teda $\prod_{\sigma\in\Sigma} \mathcal{A}_\sigma/\mathcal{D} \equiv \mathcal{B}$. Preto $\mathcal{B} \in \mathbf{K}$.

3.7.2 Veta. *Nech* $\mathbf{K}$ *je ľubovoľná trieda štruktúr jazyka* L*. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*
(i) $\mathbf{K}$ *je konečne axiomatizovateľná trieda.*
(ii) $\mathbf{K}$ *aj* $\mathrm{Mod}(L) \smallsetminus \mathbf{K}$ *sú axiomatické triedy.*

Dôkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) je takmer očividná. Ak je totiž $\mathbf{K}$ konečne axiomatizovateľná trieda, tak existuje uzavretá L-formula σ (univerzálny uzáver konjunkcie všetkých axióm definujúcich triedu $\mathbf{K}$) taká, že $\mathbf{K} = \mathrm{Mod}(\{\sigma\})$. Potom pre doplnok $\mathbf{K}' = \mathrm{Mod}(L) \smallsetminus \mathbf{K}$ triedy $\mathbf{K}$ v triede všetkých L-štruktúr platí $\mathbf{K}' = \mathrm{Mod}(\{\neg\sigma\})$, čiže aj $\mathbf{K}'$ je konečne axiomatizovateľná trieda.

Dokážeme (ii) $\Rightarrow$ (i). Označme $\Sigma = \mathrm{Th}(\mathbf{K})$. Zrejme Σ je množina uzavretých formúl jazyka L uzavretá na konečné konjunkcie. Keďže $\mathbf{K}$ aj jej doplnok $\mathbf{K}'$ sú axiomatické triedy, platí $\mathbf{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$ a trieda $\mathbf{K}'$ je uzavretá na ultraprodukty. Dokážeme, že existuje $\sigma \in \Sigma$ také, že $\mathbf{K} = \mathrm{Mod}(\{\sigma\})$. V opačnom prípade by pre každé $\sigma \in \Sigma$ existovala štruktúra $\mathcal{A}_\sigma \in \mathbf{K}'$ taká, že $\mathcal{A}_\sigma \vDash \sigma$. Podľa Vety 3.6.1 o kompaktnosti existuje ultrafilter $\mathcal{D}$ na množine Σ taký, že $\prod_{\sigma\in\Sigma} \mathcal{A}_\sigma/\mathcal{D} \vDash \Sigma$. Potom

$$\prod_{\sigma\in\Sigma} \mathcal{A}_\sigma \Big/ \mathcal{D} \in \mathbf{K} \cap \mathbf{K}'$$

čo je spor.

Úloha. Nech S, T sú teórie (ktorých axiómy sú uzavreté formuly) v jazyku L a $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$ sú triedy L-štruktúr.

(a) Dokážte nasledujúce vzťahy:

$$S \subseteq T \;\Rightarrow\; \mathrm{Mod}(T) \subseteq \mathrm{Mod}(S) \qquad\qquad T \subseteq \mathrm{Th}(\mathrm{Mod}\, T)$$
$$\mathbf{J} \subseteq \mathbf{K} \;\Rightarrow\; \mathrm{Th}(\mathbf{K}) \subseteq \mathrm{Th}(\mathbf{J}) \qquad\qquad \mathbf{K} \subseteq \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}\, \mathbf{K})$$

(b) Odvoďte z (a) rovnosti

$$\mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathrm{Mod}\, T)) = \mathrm{Mod}(T) \qquad\qquad \mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(\mathrm{Th}\, \mathbf{K})) = \mathrm{Th}(\mathbf{K})$$

(c) Dokážte, že množina $\mathrm{Th}(\mathrm{Mod}\, T)$ pozostáva práve zo všetkých uzavretých L-formúl φ takých, že $T \vdash \varphi$.

(d) Dokážte, že $\mathrm{Mod}(\mathrm{Th}\, \mathbf{K})$ je najmenšia axiomatická trieda $\mathbf{M} \subseteq \mathrm{Mod}(L)$ taká, že $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{M}$.

(e) Dokážte, že trieda $\mathrm{Mod}(\mathrm{Th}\, \mathbf{K})$ pozostáva práve zo všetkých L-štruktúr $\mathcal{B}$, ktoré sú izomorfné s elementárnymi podštruktúrami ultraproduktov všetkých možných systémov $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ štruktúr $\mathcal{A}_i \in \mathbf{K}$.