Tri podoby princípu matematickej indukcie

Princíp indukcie pre prirodzené čísla z množiny $\mathbb{N}$ možno vysloviť v nasledujúcich troch ekvivalentných podobách:

Princíp dobrého usporiadania (PDU). Nech $\varphi(x)$ je nejaká formula jazyka aritmetiky. Potom

$$(\exists\, x)\varphi(x) \;\Rightarrow\; (\exists\, x)\big(\varphi(x) \wedge (\forall\, y < x)\neg\varphi(y)\big).$$

Prvý princíp matematickej indukcie (PMI1). Nech $\varphi(x)$ je nejaká formula jazyka aritmetiky. Potom

$$\big[\varphi(0) \wedge (\forall\, x)\big(\varphi(x) \;\Rightarrow\; \varphi(x+1)\big)\big] \;\Rightarrow\; (\forall\, x)\varphi(x).$$

Druhý princíp matematickej indukcie (PMI2). Nech $\varphi(x)$ je nejaká formula jazyka aritmetiky. Potom

$$(\forall\, x)\big((\forall\, y < x)\varphi(y) \;\Rightarrow\; \varphi(x)\big) \;\Rightarrow\; (\forall\, x)\varphi(x).$$

Poznámka o značení ohraničených kvantifikátorov. $(\exists\, y < x)\varphi(x)$ je skráteným zápisom formuly $(\exists\, y)\big(y < x \wedge \varphi(y)\big)$ a $(\forall\, y < x)\varphi(y)$ je skráteným zápisom formuly $(\forall\, y)(y < x \;\Rightarrow\; \varphi(y))$; podobne možno zaviesť aj ohraničené kvantifikácie $(\exists\, y \leq x)\varphi(x)$ a $(\forall\, y \leq x)\varphi(y)$.

Dokážeme ekvivalenciu uvedených troch princípov.

(PDU) $\Rightarrow$ (PMI1): Predpokladáme platnosť princípu dobrého usporiadania a s jeho pomocou dokážeme platnosť prvého princípu matematickej indukcie. Nech $\varphi(x)$ je vlastnosť prirodzených čísel sformulovaná v jazyku aritmetiky, pre ktorú platí

$$\varphi(0) \wedge (\forall\, x)\big(\varphi(x) \;\Rightarrow\; \varphi(x+1)\big).$$

Potrebujeme dokázať, že potom platí tiež $(\forall\, x)\varphi(x)$. S úmyslom odvodiť spor pripusťme, že to nie je pravda, teda platí $(\exists\, x)\neg\varphi(x)$. Podľa (PDU) použitého na vlastnosť $\neg\varphi(x)$ potom platí tiež

$$(\exists\, x)\big(\neg\varphi(x) \wedge (\forall\, y < x)\varphi(y)\big).$$

Nech x je také prirodzené číslo. Keďže platí $\varphi(0)$, zrejme $x > 0$. Pre všetky $y < x$ máme $\varphi(y)$, špeciálne $\varphi(x-1)$. Podľa indukčného predpokladu $\varphi(x-1) \;\Rightarrow\; \varphi(x)$. Platí teda $\varphi(x)$, čo je hľadaný spor.

(PMI1) $\Rightarrow$ (PMI2): Predpokladáme platnosť prvého princípu matematickej indukcie a s jeho pomocou dokážeme platnosť druhého princípu matematickej indukcie. Nech $\varphi(x)$ je vlastnosť prirodzených čísel sformulovaná v jazyku aritmetiky, pre ktorú platí

$$(\forall\, x)\big((\forall\, y < x)\varphi(y) \;\Rightarrow\; \varphi(x)\big).$$

Potrebujeme dokázať, že potom platí tvrdenie $(\forall\, x)\varphi(x)$. Označme $\psi(x)$ formulu $(\forall\, y < x)\varphi(y)$. Uvedený predpoklad teraz môžeme zapísať v tvare

$$(\forall\, x)\big(\psi(x) \;\Rightarrow\; \varphi(x)\big).$$

Stačí teda dokázať, že platí $(\forall\, x)\psi(x)$; vďaka predpokladu odtiaľ už bezprostredne vyplýva potrebný záver $(\forall\, x)\varphi(x)$. Tvrdenie $(\forall\, x)\psi(x)$ budeme dokazovať podľa (PMI1).

1° Keďže $y < 0$ neplatí pre žiadne prirodzené číslo y, tvrdenie $\psi(0)$ je triviálne splnené.

2° Predpokladajme, že platí $\psi(x)$. Uvedomme si, že tvrdenie $\psi(x+1)$ je ekvivalentné s tvrdením $(\forall\, y \leq x)\varphi(y)$, čo je to isté ako $\psi(x) \wedge \varphi(x)$. Potrebujeme teda dokázať implikáciu

$$\psi(x) \;\Rightarrow\; \psi(x) \wedge \varphi(x).$$

To je však triválne, lebo $\psi(x) \;\Rightarrow\; \psi(x)$ je tautológia a $\psi(x) \;\Rightarrow\; \varphi(x)$ je práve náš predpoklad. Podľa (PMI1) teda platí $(\forall\, x)\psi(x)$, preto tiež $(\forall\, x)\varphi(x)$, čo sme chceli dokázať.

(PMI2) ⇒ (PDU): Treba dokázať, že z platnosti druhého princípu matematickej indukcie vyplýva princíp dobrého usporiadania. Výlučne formálnymi manipuláciami však možno priamo nahliadnuť ekvivalenciu oboch princípov. Z implikácie (PMI2)

$$(\forall\, x)\big((\forall\, y < x)\varphi(y) \;\Rightarrow\; \varphi(x)\big) \;\Rightarrow\; (\forall\, x)\varphi(x)$$

transpozíciou a použitím pravidiel o negácii kvantifikovaných formúl resp. negácii implikácie a nakoniec zameniteľnosti poradia členov konjunkcie postupne dostávame ekvivalentné tvrdenia

$$\begin{aligned}
\neg(\forall\, x)\varphi(x) \;&\Rightarrow\; \neg(\forall\, x)\big((\forall\, y < x)\varphi(y) \;\Rightarrow\; \varphi(x)\big),\\
(\exists\, x)\neg\varphi(x) \;&\Rightarrow\; (\exists\, x)\neg\big((\forall\, y < x)\varphi(y) \;\Rightarrow\; \varphi(x)\big),\\
(\exists\, x)\neg\varphi(x) \;&\Rightarrow\; (\exists\, x)\big((\forall\, y < x)\varphi(y) \wedge \neg\varphi(x)\big),\\
(\exists\, x)\neg\varphi(x) \;&\Rightarrow\; (\exists\, x)\big(\neg\varphi(x) \wedge (\forall\, y < x)\varphi(y)\big),
\end{aligned}$$

čo je (PDU) pre formulu $\neg\varphi(x)$.

V takejto formulácii sú uvedené princípy schémami v logike prvého rádu (obsahujú len kvantifikácie premenných pre prirodzené čísla). Možno ich vysloviť aj v silnejšej podobe v logike druhého rádu, ktorá umožňuje kvantifikovať aj premenné pre podmnožiny množiny prirodzených čísel. Opäť tak dostávame tri ekvivalentné princípy. Obmedzíme sa len na ich formuláciu; ich ekvivalenciu možno dokázať podobným spôsobom ako ekvivalenciu im zodpovedajúcich prvorádových schém.

Princíp dobrého usporiadania (PDU)

$$(\forall\, A \subseteq \mathbb{N})\big[A \neq \emptyset \;\Rightarrow\; (\exists\, x \in A)(\forall\, y < x)(y \notin A)\big].$$

Prvý princíp matematickej indukcie (PMI1)

$$(\forall\, A \subseteq \mathbb{N})\big[0 \in A \wedge (\forall\, x)(x \in A \Rightarrow x+1 \in A) \;\Rightarrow\; A = \mathbb{N}\big].$$

Druhý princíp matematickej indukcie (PMI1)

$$(\forall\, A \subseteq \mathbb{N})\big[(\forall\, x)\big((\forall\, y < x)(y \in A) \Rightarrow x \in A\big) \;\Rightarrow\; A = \mathbb{N})\big].$$

Ak si uvedomíme, že pri von Nemannovom modelovaní je každé prirodzené číslo množinou prirodzených čísel menších od neho, možno princíp dobrého usporiadania resp. druhý princíp matematickej indukcie vysloviť v nasledujúcej stručnejšej podobe:

(PDU) $$(\forall\, A \subseteq \mathbb{N})\big[A \neq \emptyset \;\Rightarrow\; (\exists\, x \in A)(x \cap A = \emptyset)\big];$$

(PMI2) $$(\forall\, A \subseteq \mathbb{N})\big[(\forall\, x)(x \subseteq A \Rightarrow x \in A) \;\Rightarrow\; A = \mathbb{N})\big].$$