Pavol Zlatoš

Ani matematika si nemôže byť istá sama sebou

Úvahy o množinách nekonečne paradoxoch a Gödelových vetách

Úvod

V celých dejinách matematiky nenájdeme výsledok, ktorý by našimi predstavami o možnostiach ľudského poznania otriasol spôsobom porovnateľným s účinkom Gödelových viet o neúplnosti.

Isteže, za niekoľko tisícročí existencie matematiky sme už boli svedkami všeličoho.

Napríklad dnes už môžeme len ťažko precítiť úžas starých Helénov nad objavom nesúmerateľnosti strany a uhlopriečky štvorca či pravidelného päťuholníka. A účinok týchto objavov na pytagorejskú vieru o harmónii logu a kozmu založenej na harmónii číselných pomerov môže hádam tak trochu pripomínať účinok Gödelových viet. Veď si len uvedomme, že zlatý rez, najkrajší a najdokonalejší z dĺžkových pomerov, je práve pomerom strany a uhlopriečky pravidelného päťuholníka.

Sú tu tiež veľké matematické objavy, ktoré svojím teoretickým prínosom v matematickej prírodovede i užitočnosťou v technických aplikáciách Gödelove výsledky ďaleko prekonávajú. Za všetky spomeňme aspoň Leibnizov a Newtonov infinitezimálny počet.

Širokej verejnosti je, nepochybne aspoň podľa mena, známejších niekoľko málo otvorených problémov odolávajúcich pokusom o riešenie celé stáročia a predstavujúcich výzvu nielen vedúcim matematickým duchom viacerých epoch, no i zástupom ambicióznych samoukov a amatérov. Ďaleko najznámejšia predstaviteľka tejto kategórie – Veľká Fermatova veta – ako sa zdá, celkom nedávno našla konečne svojho premožiteľa.

Napokon by sme nemali zabúdať na množstvo plodných moderných matematických teórií, dobývajúcich pre matematiku nové územia, umožňujúcich matematizovať okruhy javov, ktoré doposiaľ matematizácii úspešne vzdorovali, a vrhajúcich nové svetlo na vzťahy fyziky mikrosveta a globálnych vlastností vesmíru, náhodnosti a determinovanosti, spontánneho vzniku a zmien štruktúr atď. Názvy ako teória katastrof, synergetika či teória chaosu už hojne prenikli na verejnosť a napriek hurhaju a vlnám senzácií, ktoré ich spočiatku obklopovali, i sprievodu priživujúcich sa šarlatánov našli svoje dôstojné miesto v budove matematiky.

Ani jeden zo spomínaných objavov či teórií však ľudské poznanie vôbec, a matematiku a logiku zvlášť, nepostavil tak vyhranene zoči-voči hraniciam ich vlastných možností, žiaden z nich nenaštrbil väčšmi novovekú európsku vieru a dôveru vo všemocnosť a univerzálnosť vedy a racionality.

Spolu s teóriou relativity a kvantovou mechanikou to boli práve Gödelove vety, ktoré si vynútili zásadné prehodnotenie zakorenenej epistemologickej doktríny mechanistického, deterministického a poznateľného sveta vloženého do absolútneho priestoru a času.

A o sotvaktorom matematickom objave sa popísalo toľko filozofických úvah. Popri mnohých hlbokých a podnetných myšlienkach a dielach sa však i v tejto oblasti postupne utvorilo, nakopilo a kanonizovalo množstvo rozmanitých klišé, ktoré sa časom premenili na nedoložené, no pohodlné formulky umožňujúce bezpečne kĺzať po povrchu problematiky bez obáv z pádu kamsi hlbšie do jej jadra.

Naša verejnosť nemala doteraz možnosť oboznámiť sa s Gödelovými objavmi, ich pozadím a dôsledkami, a to ani z matematickej stránky, ani v nejakej populárnej podobe. Príslušný titul v slovenskom jazyku, či už pôvodný alebo v preklade, jednoducho nejestvuje. Aj na samotnej Matematicko-fyzikálnej fakulte Univerzity Komenského v Bratislave sa s Gödelovými vetami počas štúdia zoznámi len nepatrný zlomok študentov, i to len viac-menej informatívne a okrajovo. Kniha, ktorú čitateľ práve dostáva do rúk, si kladie za cieľ zaplniť túto dlhšie už neúnosnú medzeru. Pritom, ako sme už naznačili, ide vlastne hneď o medzery tri – týkajúce sa matematického, filozofického a popularizačného aspektu celej problematiky. Zaplniť aspoň čiastočne každú z nich sú tri úlohy, ktoré si do istej miery protirečia a ktoré nemožno splniť bez určitých kompromisov na každej strane.

Aby sme mohli pochopiť, prečo Gödelove výsledky mali taký ďalekosiahly účinok, bude potrebné nielen načrtnúť atmosféru ich doby a sformulovať otázky, na ktoré dali odpoveď, ale aj oboznámiť sa s mnohým, čo im predchádzalo. Preto našu cestu k nim bude nutné začať približne o osemdesiat rokov skôr, v polovici minulého storočia, keď sa začala rodiť potreba zjednotenia matematiky na nejakom spoločnom základe a zároveň vykryštalizúvať pojem množiny, ktorý umožnil začať ju postupne napňať. Naše úvahy tak zasadíme do rámca filozofickej problematiky základov matematiky. Tým otvoríme podstatne širší okruh otázok významných aj samých osebe, z ktorých sa však pokúsime vybrať len niekoľko čo možno najreprezentatívnejších, navyše úzko súvisiacich s naším pôvodným zámerom. Samotné Gödelove vety, ku ktorým sa takto dostaneme až v záverečnej kapitole, tak budú akýmsi vyvrcholením našej spoločnej púte.

K výkladu naznačených otázok môžeme pristúpiť z najrozličnejších východísk. Pritom práve voľba východzieho prístupu rozhodujúcou mierou predurčuje charakter celého výkladu. Rozhoduje totiž o tom, ktoré pojmy, javy a otázky budeme považovať za základné a ktoré budeme z nich odvodzovať a zdôvodňovať ich prostredníctvom, do akých súvislostí ich budeme zasadzovať, a taktiež o tom, ktorým z nich budeme prikladať prvoradý význam, a ktoré si budeme všímať len okrajovo alebo vôbec nie. Pri inej voľbe východzieho prístupu sa môže celá táto hierarchia značne pozmeniť, niekedy priam obrátiť, celkom iné súvislosti môžu vystúpiť na povrch, iné javy vyniknúť a iné sa ocitnúť v ústraní, či celkom vypadnúť z hry.

Nášmu čitateľovi hodláme ponúknuť dve možné východiská. Pri prvom z nich budeme celú problematiku posudzovať dôsledne vo svetle vedúcich zámerov teórie množín a nimi tiež necháme viesť svoj výklad.

Samozrejme, nie je to jediné možné východisko. Vari podstatne hlbší prienik k jadru veci by sa nám mohol podariť pri druhom ponúkanom východzom prístupe, založenom na otázke po spôsobe bytia ideálnych matematických objektov

a rozličných poňatiach jeho výkladu. Sme si však vedomí, že pri absencii konkrétneho materiálu by sme práve podobnými „metafyzickými” úvahami mohli hneď na začiatku odradiť menej filozoficky naladeného čitateľa. V tom prípade mu radíme preskočiť celú prvú kapitolu a hneď po úvode pokračovať kapitolou druhou. K vynechanej kapitole sa potom môže vrátiť, kedykoľvek bude mať na to chuť.

Jednako aspoň akási predbežná predstava o problémoch spojených s porozumením existencii ideálnych matematických objektov a jej výkladom je pre orientáciu čitateľa viac než žiadúca. Preto do láskavej pozornosti všetkých našich čitateľov, či sa už rozhodnú prvú kapitolu preskočiť alebo pokračovať pekne poporiadku, vrelo odporúčame duchaplný Platónom inšpirovaný *Dialóg o matematike* z takmer rovnomennej knižky maďarského matematika Alfréda Rényiho, ktorá je k dispozícii v slovenskom i českom preklade; ak, pravda, nedá prednosť originálu.

Keďže naším cieľom je výklad zrodu, vývoja a vzájomných vzťahov istého druhu ideí, naša metóda, ktorej podriadime organizáciu textu, má, obrazne povedané, dva rozmery historický a tematický. A pretože mnohé, či už súhlasne alebo polemicky na seba nadväzujúce idey sa neraz vyvíjali časovo paralelne, kým inokedy ich delia pomerne dlhé obdobia, záväzná lineárna štruktúra textu nás núti dať zakaždým jednej z uvedených dimenzií prednosť a druhú nechať zaznieť len z pozadia vo forme tematických odbočení, prípadne návratov do minulosti či výletov do budúcnosti. V dôsledku toho niektoré motívy zaznejú s rozličnou nástojčivosťou viackrát v rôznych variáciách a v meniacom sa doprovode. Napríklad čitateľ, ktorý si zvolí skrátený postup, nájde na miestach, ktoré si to budú vyžadovať, krátke zhrnutie príslušných úvah z prvej kapitoly.

Kľúčovým momentom celej knihy sú otázky všeobecného výkladu javu nekonečna. Okrem už tradičných pohľadov na filozofickú problematiku nekonečna všeobecne a matematického nekonečna zvlášť, predvedieme i niektoré prístupy novšieho dáta, vyplývajúce z matematických výskumov a im predchádzajúcich filozofických štúdií v tzv. alternatívnej teórii množín, rozpracovanej v pomerne nedávnej minulosti československou školou založenou a vedenou Petrom Vopěnkom, ku ktorej istý čas patril i autor tejto knihy.

Z filozofického hľadiska vychádza tento prístup z fenomenológie Edmunda Husserla a Martina Heideggera. Pri takomto pohľade sa značná časť filozofických otázok (nielen) základov matematiky, ako i spory, ktorých sme v jej histórii boli svedkami, dostáva do celkom iného svetla, dosiaľ netušené súvislosti vystupujú na povrch, kým mnohé tradične do popredia vyzdvihované otázky ustupujú do úzadia. Tak napríklad otázka vzťahu tzv. prirodzeného a absolútneho nekonečna nadobúda rozhodujúci, kým tradične prvoradá otázka vzťahu nekonečna potenciálneho a aktuálneho len druhoradý význam.

Autor si považuje za povinnosť zdôrazniť, že spomínaný prístup mu nepatrí. Naučil sa ho od P. Vopěnku, ktorý objavil plodnosť fenomenologickej metódy v matematike a jej filozofii a rozpracoval ju do pozoruhodnej hĺbky vo svojich knihách venovaných dejinám a „psychoanalýze“ geometrie a matematike v alternatívnej teórii množín, kde tiež náležite predviedol, čo všetko je v jej moci. Podobnosť, ktorú možno objaviť na viacerých miestach spomínaných diel a tejto knihy, teda nie je nijako náhodná.

1. Rôzne pohľady na existenciu matematických objektov

Hoci matematika sa radí k prírodným vedám, výrazne sa od ostatných z nich odlišuje charakterom svojho predmetu. Kým ľubovoľná iná prírodná veda skúma, či už bezprostredne alebo sprostredkovane, nejakú oblasť javov reálneho sveta, vzťah matematiky k realite je, takpovediac, dvojnásobne sprostredkovaný. Predmet matematiky je ideálny, to znamená, že sa nenachádza priamo v reálnom svete. Matematika si podľa jedných vytvára a podľa iných objavuje svoj vlastný ideálny svet či lepšie povedané svety, a tie potom skúma. Jednou zo základných úloh filozofie matematiky je teda objasniť vzťah tohto ideálneho matematického sveta či svetov k svetu reálnemu. Je to vlastne vzťah, ktorý, okrem iného, zakladá možnosť aplikácií matematiky.

V týchto krátkych úvahách si nekladieme za cieľ vyčerpávajúcim spôsobom zodpovedať naznačenú otázku. Naopak, sme presvedčení, že na ňu s konečnou platnosťou ani odpovedať nemožno. O to je však dôležitejšie v každom jednotlivom období vývoja matematiky klásť si ju nanovo a opätovne na ňu hľadať odpoveď. Snáď ani netreba zvlášť podotýkať, že práve rôzne odpovede na túto otázku, spôsoby, akými sa na ňu hľadá odpoveď, no v nemenšej miere aj samotný spôsob kladenia a formulácie tejto otázky, patria k najvýraznejším znakom rôznych etáp vývoja matematiky či rôznych matematických prúdov a škôl. My sa však touto otázkou budeme zaoberať len v obmedzenom rozsahu, potrebnom pre účely našich úvah.

Dodnes najbežnejší spôsob, akým sa odpoveď na uvedenú otázku hľadá, spočíva v nasledujúcej redukcii. Riešiť túto otázku naraz pre celú matematiku je, očividne, nad naše sily. No keďže takmer celá súčasná matematika sa opiera o teóriu množín, pokúšame sa ju sformulovať a položiť najprv v zúženej podobe len pre túto teóriu a pôvodnú otázku na túto jej podotázku redukovať. Inak povedané, zodpovednosť za zmysel matematiky tak presúvame temer výlučne na plecia teórie množín, podobne ako sme už dávnejšie na ňu presunuli zodpovednosť za jej formálnu bezospornosť. Predpoklad, že z takto získanej čiastočnej odpovede už dokážeme v konečnom dôsledku vyťažiť odpoveď aj na pôvodnú otázku, je istotne veľmi lákavý a z čisto vnútromatematického hľadiska nie celkom nepodložený. Žiaľ, je to predpoklad scestný.

Jestvuje viacero dôvodov, ktorými možno vysvetliť túto jeho scestnosť, ba až absurdnosť snáh založiť aplikácie matematiky na zhode sveta množín s reálnym svetom. Jeden, ktorý tu uvedieme, je celkom banálny. Ide totiž o to, že celý rad matematických teórií zobrazuje, či aspoň pôvodne zobrazoval, nejaký výsek skutočnosti, prípadne nejaký teoretický model inej vedy, pomerne jednoduchým, prirodzeným spôsobom, takže nahliadnuť vzťah príslušného matematického modelu a zobrazovanej skutočnosti, prípadne inovedného modelu, bolo možné takpovediac bezprostredne. To však už nemusí platiť o modeli takejto matematickej teórie v teórii množín. Pri podobnom druhotnom či dokonca „treťotnom”, často značne umelom a skresľujúcom modelovaní sa vzťah výsledného modelu a reality môže veľmi „úspešne” zakryť, čím sa stráca prirodzené vodidlo, spočívajúce práve v tomto vzťahu. Miesto reálnych problémov, ktorých skúmaniu mal matematický model pôvodne slúžiť, sa potom často študujú rôzne „špecialitky” príslušného množinového modelu.

Dovedený až do krajnosti vedie takýto prístup k prerušeniu spojenia medzi matematikou a realitou a napokon k strate reality. Miesto reality potom zaujme podvedome platónsky chápaný svet množín, dovedených na úroveň ontologických súcien. Tým sa však už dostávame k pomerne jemným otázkam, pred ktorými je potrebné uviesť niekoľko úvah trochu všeobecnejšieho rázu.

Existencia matematických objektov

Objekty, ktoré matematika študuje, pobývajú v ideálnom matematickom svete, zatiaľ čo v reálnom svete by sme ich márne hľadali. Ideálne matematické objekty teda v obvyklom zmysle tohto slova neexistujú. Napriek tomu o existencii rôznych matematických objektov bežne vyslovujeme množstvo matematických tvrdení. Ich dôležitosť a početnosť si dokonca vynútila zavedenie zvláštneho symbolu, uľahčujúceho zápis takýchto tvrdení – existenčného kvantifikátora $\exists$. Hneď na začiatku našich úvah sme teda dospeli k paradoxu, podľa ktorého existenčné matematické tvrdenia tvrdia existenciu, aspoň v bežnom zmysle tohto slova, neexistujúcich objektov. Tento paradox nás upozorňuje na dôležitú skutočnosť, že zmysel matematického tvrdenia tvaru *„existuje X také, že …“* nie je celkom očividný a nijako ho nemožno rozlúštiť len na základe nášho povrchného porozumenia prirodzenému jazyku.

Náš vstup do ideálneho matematického sveta tak vedie cez bránu porozumenia existencii, čiže bytiu ideálnych matematických objektov.

Cestu do matematického sveta nemôžeme započať nikde inde než vo svete našej každodennej skutočnosti a skúsenosti a túto cestu musí prejsť každý sám, hoci nie každému, kto sa na ňu podujme, sa ideálny matematický svet otvorí rovnakou mierou, ba niekomu sa nemusí otvoriť vôbec. To neznamená, že by si nemohol osvojiť i značný objem matematických poznatkov a postupov, dokonca ich aj zručne a úspešne používať, no nazerať matematické objekty v ich ideálnej čistote mu zostáva odopreté. Na druhej strane práve osvojovanie si matematických poznatkov a cibrenie zručností v ich používaní vstupu do matematického sveta nevyhnutne predchádza.

Cestu, ktorou prenikáme z reálneho do ideálneho (nielen) matematického sveta, nazývame *idealizáciou*.

Túto cestu si môžeme vykladať ako postupne sa otvárajúci a rozjasňujúci pohľad nás, bytostí pripútaných k reálnemu svetu, do sveta ideálneho, v ústrety svetlu, ktoré sa nám rozžína oproti, rozptyľujúc chmáry a rozháňajúc temnoty, odhaľujúc nám bytie ideálnych objektov v čoraz plnšej pravde, dokonalosti a čistote a spätne osvetľujúc i náš reálny svet. Ideálny svet sa nám však neotvorí bez nášho pričinenia, často musíme vynaložiť značné úsilie, aby sme zahliadli čo i len slabý

záblesk onoho svetla, a potom ho, nehľadiac na počiatočné tápanie v pološere, odhodlane nasledovať, až pokým nezačneme vidieť jasne.

Môžeme si ju však vyložiť aj ako oslepenie žiarou preludu, od ktorého, ak sa nás raz zmocní, sa už len ťažko dokážeme odpútať a vrátiť sa z jeho mámivých výšav späť na pevnú zem.

V duchu aristotelovskej tradície, ktorej vplyv v podobných otázkach, hoci nie vždy na prospech veci, kedysi dávno prevládol, sa však spomínaná cesta zvykne redukovať na istý druh krokov, v ktorých sa nám po nej neraz prichodí uberať. Tieto jednotlivé kroky potom nazývame stupňami *abstrakcie*. Práve pri abstrakcii, asi najnápadnejšej a introspekcii najprístupnejšej, veľmi dôležitej, hoci zďaleka nie jedinej zložke procesu idealizácie, sa teraz na chvíľu pristavíme.

Začnime poznámkou, že abstrakcia (doslova odňatie, odlúčenie) ako špecifický myšlienkový úkon nie je nejakou výlučnou výsadou matematiky. Práve naopak, ľubovoľná vedná disciplína pri skúmaní nejakého spoločenstva objektov reálneho sveta voľky-nevoľky abstrahuje od celého radu sprievodných javov ukazujúcich sa na tomto spoločenstve, ktoré z hľadiska svojich zámerov považuje za nepodstatné. Pritom mnohé takéto zdanlivo nepodstatné javy sa môžu neraz ukázať ako nezanedbateľné, takže adekvátnejšie poznanie si už nemôže dovoliť od nich abstrahovať.

Pri matematickej idealizácii, ktorou tvoríme nejaký ideálny objekt z jedného či viacerých objektov reálnych, abstrahujeme predovšetkým od ich dočasnosti, nestálosti a premenlivosti. Bytie matematických objektov je teda nadčasové, stále a nemenné. Pri väčšine idealizácií, napríklad pri odkrývaní ideálnych geometrických objektov, abstrahujeme aj od ich materiálnosti (čo napr. pre marxizmus znamená priam od objektívnej existencie) ich reálnych vzorov. (To čiastočne osvetľuje pôvod nášho paradoxu.) No nielen to, v klasickej geometrii im priznávame aj akúsi absolútnu tvarovú dokonalosť, aká sa nám na nijakom reálnom objekte nemôže ukázať. Tak napríklad veľmi dobre rozumieme, čo mienime zdanlivo protirečivým tvrdením: „Dokonalá kružnica v skutočnosti nejestvuje, no matematická kružnica je práve takáto dokonalá kružnica.” Pritom sa sotva nájde matematik, ktorý by popieral existenciu kružnice v ideálnom matematickom zmysle, hoci nie každý si je odlišnosti dvoch modov existencie reálnej a ideálnej kružnice plne vedomý. Jednako práve porozumenie uvedenému protirečivému tvrdeniu je akýmsi prvým poodchýleným okienkom do ideálneho geometrického sveta.

Skúmaním ideálneho matematického sveta, niekedy i bez prihliadnutia na jeho súvis s reálnym svetom, možno často dospieť k pozoruhodným poznatkom, ktoré nám vypovedajú hodne o javoch reálneho sveta, prípadne ich môžeme na tieto javy úspešne aplikovať. Takúto úspešnú aplikáciu si potom vykladáme, aspoň v danej oblasti javov, ako potvrdenie správnosti príslušnej matematickej teórie, a tým aj oprávnenosti idealizácie, ktorá viedla k vytvoreniu jej ideálneho sveta. Môžeme si ju však vyložiť aj obrátene. V takom prípade považujeme reálny svet či jeho časť len za nedokonalý, nestály obraz sveta ideálneho, takže podobná zhoda nás vlastne nemôže prekvapiť. Prekvapiť by nás musel opak.

Možnosť vzniku i tohto druhého výkladu vzťahu matematiky a reality spočíva v celom rade príčin. Z nich tu opäť spomenieme len jednu, spočívajúcu v typickej tendencii matematiky vzťahovať sa na seba samu.

Samovzťažnosť, čiže skúmanie seba samej, je jednou zo špecifických – a rovno dodajme, že dnes už i nevyhnutných – čŕt matematiky. Matematika sa totiž obracia – a často sa dokonca musí obracať – na svoje ideálne objekty, *ako keby* to boli objekty reálne. Z nich potom opätovnou idealizáciou môže tvoriť ideálne objekty „vyššej” úrovne. Typickým príkladom takéhoto prístupu je abstraktná algebra alebo funkcionálna analýza. V tomto postupe môžeme prakticky neobmedzene pokračovať, trebárs až na úroveň teórie kategórií či ešte ďalej. Musieť si pritom neustále uvedomovať výšku príslušnej idealizačnej úrovne by bolo značne nepohodlné a z hľadiska samotnej teórie aj zbytočné. Omnoho účelnejšie sa ukazuje dívať sa na ideálne objekty, z ktorých ďalšou idealizáciou tvoríme objekty „ešte ideálnejšie” jednoducho ako na „objekty”, t. j. *abstrahovať od ich ideálnosti*. Po takejto abstrakcii sa nám však už stiera rozdiel medzi existenciou reálnych a ideálnych objektov, prinajmenšom až po príslušnú idealizačnú úroveň. Pretože však poslednú idealizačnú úroveň nemožno stanoviť – za každou môže nasledovať ďalšia – potenciálne sa nám tak stiera rozdiel medzi modmi existencie vôbec všetkých reálnych a ideálnych matematických objektov. Ak teda zabudneme na ono zdôraznené „ako keby”, ľahko nás to zvedie priznať skutočnú existenciu všetkým ideálnym matematickým objektom. Ak si navyše uvedomíme, o čo sú tieto ideálne objekty „dokonalejšie” než objekty reálneho sveta, ochotne im priznáme i dokonalejšiu, teda o. i. aj prvotnejšiu existenciu než tým druhým. Krátko povedané, samovzťažnosť matematiky nás tak privádza na novoplatónske stanovisko.

Ak ponecháme bokom otázku prvotnosti, ktorú zrejme s konečnou platnosťou nie sme schopní rozhodnúť, môžeme pre čitateľa, ktorý má rád poriadok, sformulovať tento krátky súhrn:

Matematické objekty sú ideálnymi formami rôznych stránok reálnych objektov, prípadne ideálnych objektov nižších úrovní. Ich vzťah je, vďaka procesu idealizácie a presvitaniu ideálnych foriem z reálnych objektov, obojstranný, navyše často posilňovaný spätnou väzbou aplikácií. Popri prebývaní v ideálnom matematickom svete sú ideálne matematické objekty tiež súčasťou nášho kolektívneho vedomia. Práve táto kolektívnosť, všeobecnosť a použiteľnosť zakladá napriek (či vďaka) ich idealite ich objektívny charakter.

Hoci s touto pohodlnou poučkou vo väčšine prípadov vystačíme, mali by sme si byť vedomí, že celú problematiku sme tým zďaleka neobjasnili. Práve naopak, uzatvárame ju, sotva sme ju stihli máličko pootvoriť.

Ďalej sa už budeme zapodievať zmyslom tvrdení o existencii matematických objektov temer výlučne z matematického hľadiska a na ich vzťah k realite budeme prihliadať len okrajovo. No z dôvodu, že na význam slova „existuje” panuje i v rámci samotnej čistej matematiky viacero protichodných názorov, a v rôznych súvislostiach toto slovo naozaj môže oprávnene nadobúdať značne odlišné významy, neostáva nám nič iné, iba sa s niektorými najdôležitejšími z týchto názorov postupne letmo oboznámiť.

Už len poznamenajme, že v závislosti od významu slova „existuje” sa môže meniť – a aj sa mení – význam slovného spojenia „pre každé” či „pre všetky”. To znamená, že významy existenčných a všeobecných matematických tvrdení alebo, ak chceme, význam existenčného a univerzálneho kvantifikátora,

spolu úzko súvisia. Uvidíme však, že v tomto druhom prípade nie sú spomínané názorové ani významové odlišnosti zďaleka také významné. *„Pre všetky X platí ...”* znamená jednoducho *„neexistuje X, pre ktoré neplatí ... ”*. Formálne to môžeme zapísať

$$(\forall X)\varphi(X) \ \Leftrightarrow\ \neg(\exists X)\neg\varphi(X),$$

kde $\varphi(X)$ je ľubovoľná vlastnosť. Na druhej strane nie všetci súhlasia s tým, že *„existuje X také, že ...”* znamená to isté ako *„nie pre každé X neplatí ... ”*. Všeobecne prijímaná je len implikácia

$$(\exists X)\varphi(X) \ \Rightarrow\ \neg(\forall X)\neg\varphi(X).$$

Voči opačnej implikácii

$$\neg(\forall X)\neg\varphi(X) \ \Rightarrow\ (\exists X)\varphi(X)$$

však možno vzniesť oprávnené námietky, s ktorými sa bližšie oboznámime v kapitole venovanej intuicionizmu.

Na druhej strane v matematike obvyklý význam všeobecného kvantifikátora sa tak výrazne odlišuje od významu slovných spojení „pre všetky” a „pre každé” v prirodzenom hovorovom jazyku (kde znamenajú skôr „skoro pre všetky”, „pre každé až na pár výnimiek” a pod.), že podobný paradox ako v prípade existenčného kvantifikátora ani najmenej nehrozí.

Objekty a pojmy

Ideálne matematické objekty teda existujú v našom myslení. Pritom ponechávame otvorenú možnosť, že vlastne existujú len tam, teda že svet ideálnych matematických objektov je súčasťou sveta nášho myslenia, rovnako ako aj možnosť, že tam existujú len druhotne ako odraz akéhosi „objektívneho” ideálneho sveta existujúceho mimo nás a nezávisle od nás, prípadne mimo nás, no len v istom vzájomnom prepojení s nami. Hlavným prostriedkom, pomocou ktorého objekty nášho myslenia uchopujeme (pojímame), sú jazykové útvary – slová alebo slovné spojenia – nazývané *pojmy*. Jazyk však nie je len nástrojom nášho myslenia ale tiež prostriedkom komunikácie a zdieľania sveta i poznania o svete. Preto je dôležitým činiteľom objektivizácie nášho myslenia i poznania.

Myslenie prebieha do veľkej miery v pojmoch. Hoci v tejto otázke nevládne úplná názorová zhoda, dovolíme si tvrdiť, že myslenie sa myslením v pojmoch nevyčerpáva, že jeho nemenej dôležitými zložkami sú tiež rôzne predstavy, slovne nevyjadrené ba, dokonca nevyjadriteľné pocity, zmyslové vnemy, v podvedomí ukryté zážitky a skúsenosti zakladajúce naše prvotné porozumenie svetu, prípadne iné súčasti našej osobnosti, napr. náležitosti jej biologického vybavenia. Veľmi dôležitá úloha, najmä v tvorivom myslení, pripadá *intuícii,* čím rozumieme akési rozumom nezdôvodnené celostné uchopenie skúmaného problému jediným vhľadom či vycítením podstatných súvislostí, čo súhrnne môžeme nazvať vnuknutím.

Na druhej strane, pokiaľ si ich nechceme nechať len pre seba, výsledky myslenia sme opäť nútení formulovať v pojmoch, t. j. dodať jazykový tvar i tým jeho zložkám, ktoré ho pôvodne nemali. To je často dosť ťažké, jednako do značnej miery možné. Dokonca i v prípadoch, keď to do dôsledkov možné nie je, náležitý jazykový prejav, či už ústny alebo písomný, má schopnosť prerásť svoj úzko slovný rámec a rôzne predstavy či intuitívne porozumenie, hoc nie nutne totožné s pôvodnými, vo vnímavom čitateľovi alebo poslucháčovi navodiť a vyvolať. Trochu všeobecnejšie je to vlastne princíp umenia.

Niektoré matematické pojmy, takzvané *jednotliviny*, označujú pevný, jednoznačne určený matematický objekt. Napr. slovo „dva” označuje prirodzené číslo 2. Na druhej strane nie každému matematickému objektu zodpovedá nejaký pojem, hoci v prípade potreby môžeme pre ľubovoľný jednotlivý objekt príslušný pojem vytvoriť. Reálne čísla si však zvykneme vykladať ako objekty, no vzhľadom na nekonečnosť (dokonca nespočítateľnosť) ich oboru zrejme nie je možné mať pre každé z nich zvláštny pojem.

Matematické pojmy však nemusia označovať výlučne jednotlivé objekty. Rovnako dobre môžu označovať vlastnosti týchto objektov, vzťahy medzi nimi a pod. Môžu tiež na základe vlastností a vzťahov vydeľovať rôzne triedy jednotlivých objektov a slúžiť ich všeobecnými druhovými pomenovaniami. Takýmto pojmom hovoríme vše*obecniny* alebo tiež *univerzálie*. Napríklad pojem „množina” označuje skôr vlastnosť „byť množinou” než nejakú konkrétnu množinu: hoci v matematickom svete pobýva nesmierne množstvo množín, nijaká množina ako taká sa v ňom nenachádza. Rovnako je to napr. s pojmom „človek” vo vzťahu k reálnemu svetu.

Práve tvorba všeobecnín je príkladom abstrakcie. Abstrahovať znamená z niečoho konkrétneho myšlienkovo vydeliť a odlúčiť niečo, čo sa v skutočnosti oddeliť nedá. Ako je však možné rozdeliť skutočné a vybrať z neho niečo, čo sa samostane nevyskytuje? Na čom sa zakladá takto poňatá skúsenosť všeobecného? Spory a diskusie o tejto otázke sa v rôznych podobách tiahnu dejinami filozofie od čias antiky až skoro podnes.

Realizmus vo svojej krajnej podobe priznáva univerzáliám reálne bytie predchádzajúce bytie jednotlivých objektov a mimo týchto objektov. Krajný *nominalizmus* zasa odmieta chápanie všeobecniny ako osobitného súcna. Všeobecné samo osebe neexistuje, všeobecnina je len meno na označenie istého súboru javov (či už reálnych objektov alebo všeobecnín nižšieho rádu) na základe nejakého spoločného znaku. Medzi týmito dvoma krajnými polohami sa však rozvinul celý rad jemných, často vzájomne prepletených medzistupňov, ktorých odlišnosti už nemožno tak jednoducho postihnúť. Ich podrobnejšie sledovanie by nás navyše zaviedlo hodne ďaleko od ústrednej témy našich úvah. Spomeňme len, že Aristotelovu kritiku Platóna, stredoveký spor nominalizmu a realizmu či polaritu racionalizmu a empirizmu v novovekom európskom myslení, ako i Kantov pokus o definitívne riešenie tejto otázky – to všetko možno chápať ako príspevky do spomínanej diskusie. Realistická línia zrejme vrcholí v Hegelovom objektívnom absolútnom idealizme a doznieva v rôznych koncepciách novotomistických a novoplatónskych, kým vyústením nominalistickej a empirickej línie sú viaceré vetvy (novo)pozitivistické.

Začiatkom dvadsiateho storočia už spomínaný spor na pôde samotnej filozofie postupne stráca na ostrosti i závažnosti. O to väčší význam sa mu však začína prikladať na pôde matematiky.

Novoplatónske a platónsko-teologické stanovisko

Ak priznáme samostatnú, od nášho vedomia nezávislú, t. j. objektívnu existenciu nielen ideálnym matematickým objektom, ale vôbec všetkým všeobecným pojmom, ako sú napr. „množina", „číslo", „bod", „veľkosť", a taktiež „krása", „dobro", „pravda" a pod., no i menej vznešeným pojmom ako „teplo", „chlad", „tvrdosť" „mäkkosť", „vlhkosť" atď., objaví sa pred nami Platónov svet ideí. Svet ideálnych matematických objektov potom leží kdesi uprostred medzi svetom ideí a reálnym svetom. Samozrejme, že v platónskom poňatí svet ideí predchádza matematickému svetu.

Takéto stanovisko sa dnes zvykne považovať za krajné a málokto považuje za potrebné ho hájiť, už i len preto, že v matematike onen platónsky svet ideí v podstate nepotrebujeme a nezvykneme používať. Celkom vystačíme s ideálnym matematickým svetom, prípadne zasadeným do vzťahu so svetom reálnym. Novoplatónske stanovisko, ako sme už naznačili, spočíva v priznaní prednosti, a to tak v bytí, ako aj v dokonalosti, ideálnemu matematickému svetu pred svetom reálnym.

Tým, zdá sa, sme zároveň vyriešili otázku zmyslu existenčných tvrdení. „Existovať" v matematike znamená existovať, t. j. nachádzať sa v tomto raz a navždy danom, nemennom, ideálnom svete. „Pre každý objekt" potom znamená pre každý objekt z tohto sveta.

Pokiaľ by sme už v našich úvahách ďalej nepokračovali, mohli by sme byť navýsosť spokojní, ako jednoducho sme problém existencie matematických objektov vyriešili s konečnou platnosťou. Treba priznať, že značná časť matematikov, nepociťujúcich potrebu hlbšieho filozofovania, sa s naznačeným riešením, pokiaľ to vyhovuje ich štýlu a vkusu, skutočne uspokojí. Obľuba novoplatónskeho stanoviska je celkom prirodzená, najmä ak si uvedomíme, aké úžasné záruky objektívnosti toto poňatie na prvý pohľad poskytuje. Nie je preto bez pikantérie, že ochota hájiť toto stanovisko vo filozofickej diskusii je na druhej strane dosť zriedkavá a vzácna.

Ešte poznamenajme, že na čiste pracovnej, t. j. svetonázorovo neinterpretovanej úrovni sa stanovisko hocktorého matematika, presvedčeného o objektívnom ráze svojej vedy, a takých je väčšina, najmä pokiaľ pracuje v nejakom pevne zvolenom množinovom modeli svojej disciplíny a používa klasický predikátový počet, nedá od stanoviska novoplatónskeho nijako odlíšiť.

Nezávislá, objektívna existencia ideálneho matematického sveta je síce zárukou objektívnosti *prípadného* matematického *poznania*, nie však známkou *poznateľnosti*, ba ani *poznávateľnosti* tohto sveta. Ideálny, akejkoľvek skutočnosti predchádzajúci svet nie je prístupný našej evidencii a preniknúť doň z reálneho sveta vôbec nie je ľahké. Dokonca ani keď sa nám akousi idealizáciou podarí opustiť prízemnú skutočnosť, nijako nemáme zaručené, že sme sa už ocitli v onom ideálnom svete, v ktorého existenciu veríme a kam smerujeme. O to nástojčivejšie sa pred nami vynára otázka, ako a či vôbec sme schopní poznávať taký ideálny svet, ktorý predchádza každú našu skúsenosť. Ak nechceme skončiť v čírom agnosticizme a uspokojiť sa s konštatovaním, že tento svet je v zásade nepoznateľný, máme napochytre naporúdzi jediné východisko objavené Kantom. Toto východisko možno zhrnúť do tézy, že poznanie tohto ideálneho sveta je súčasťou nášho apriórneho poznania, rovnako predchádzajúceho každú našu skúsenosť a zakladajúceho naše istoty o reálnom svete.

Vážny úder, ktorý utrpela kantovská koncepcia priestoru a času ako apriórnych foriem nášho vnímania objavom neeuklidovských geometrií resp. teórie relativity, nás však upozorňuje, že ani tým sme všetky ťažkosti zďaleka nezažehnali.

Naše poznanie ideálneho matematického sveta však môžeme dobre oprieť o poznanie univerzálneho rozumu, absolútnej idey alebo nejakej dokonalej bytosti, ktorá celý svet obsiahne jediným pohľadom. Takýto atribút vševedúcnosti pripísala scholastická teologická filozofia Bohu. My potom z milosti Božej môžeme postupne zmyslami a rozumom poznávať to, čo On pozná bezprostredne. Toto stanovisko, nazývané platónsko-teologickým, rieši zároveň s otázkou poznateľnosti ideálneho sveta aj otázku objektívnosti a pravdivosti tohto poznania. Naše poznanie, ktorým máme účasť na Božom poznaní, nemôže byť nepravdivé; zblúdiť môže leda ten, kto nemá dostatok viery.

Teologické motivácie sa však počnúc dobou osvietenstva netešia vo vede prílišnej obľube. Teológia si za to môže predovšetkým sama tým, že sa prostriedkami inkvizície pokúšala umlčať a potlačiť všetky vedecké objavy, ktoré odporovali doslovnému zneniu Písma a cirkevným dogmám. Iste stačí spomenúť len mená Mikuláša Kopernika, Giordana Bruna a Galilea Galileiho. Tým sa nadlho skompromitovala morálne. a keď sa tieto objavy napokon napriek represiám predsa len presadili, teológii nadlho prischol punc brzdy vedeckého pokroku. Teologické motivácie sa preto vo vede pociťujú ako niečo nepatričné. Platónsko-teologické stanovisko v tej vyhranenej podobe, v akej sme ho práve vyslovili, dnes asi nikto nezastáva. Jednako zbaviť sa teologických motivácií v matematike, najmä v súvislosti s nekonečnými množinami, sa nikdy dôsledne nepodarilo. Aby uľavili svojmu „vedeckému” svedomiu, pokúsili sa matematici na ne zabudnúť. To sa pre zmenu podarilo znamenite. Takto nereflektované však teologické motivácie zapustili o to hlbšie korene v podvedomí matematikov, takže ich pohľad do ideálneho matematického sveta je stále pohľadom „Božími očami".

Háčik je však v tom, že nech by sme sa akokoľvek namáhali, stále vidíme len to, čo vidíme, a nie to, čo by sme vidieť chceli. a tak schopnosť vidieť svet „Božími očami" si zrejme iba nahovárame. Tým však na druhej strane nútime Boha vidieť svet tak, ako ho sami vidíme, prípadne by sme chceli vidieť. a tak, ako si to všimol Ludwig Feuerbach, túto bytosť najdokonalejšiu, o ktorú sme chceli oprieť naše poznanie ideálneho sveta, tvoríme opäť na svoj obraz, prípadne na obraz svojich „zbožných" želaní. Či si to už teda chceme priznať alebo nie, ideálny matematický svet tvoríme sami z reálneho sveta. To, že si o mnohých idealizáciách neuvedomujeme, ako sme k nim dospeli, takže sa nám zdá, akoby existovali nezávisle od nás a my sme k nim z reálneho sveta iba smerovali vedení ich svetlom, svedčí len o tom, že nie sme schopní plne reflektovať všetky momenty svojej duševnej činnosti, a nie o prvotnej existencii sveta ideí.

Skôr než obrátime list, mali by sme ešte raz zvážiť, či sme na niečo nezabudli, aby sme sa v hodnotení novoplatónskeho stanoviska neprenáhlili. Nášmu pozornému čitateľovi asi neuniklo, že prijať riešenie ponúknuté kantovským či teologickým poňatím nám nie je práve po chuti, ba máme pre to aj isté dôvody. Zabudli sme však na samotného Platóna. Nuž, či je nám to už po chuti alebo nie, zatiaľ nemáme nijaký pádny argument proti pôvodnému platónskemu poňatiu, na ktoré sme „zabudli" tak trochu schválne, aby sme aspoň pocitovo navodili stav, ktorého sme už dlhšie svedkami. Skutočne konzistentné a jednoduché riešenie vzťahu reálneho a ideálneho matematického sveta v Platónovom duchu sme už stručne naznačili o dva paragrafy skôr. Stačí sa teda k nemu na chvíľu vrátiť a trochu ho rozvinúť.

Pohľad do ideálneho matematického sveta sa nám môže podariť zostrením a predĺžením pohľadu do reálneho sveta, a to vďaka tomu, že reálne objekty sú, hoci len nedokonalými, jednako však obrazmi dokonalých, ideálnych objektov. Dalo by sa povedať, že tie druhé sú ideálnymi formami tých prvých. Do ideálneho matematického sveta potom prenikáme zo sveta reálneho očisťovaním foriem reálnych objektov od ich materiálnych náplní. Keby sme sa chceli vyjadrovať dôsledne v Platónovom duchu, museli by sme dokonca miesto o objektoch reálneho sveta hovoriť o predmetoch našej skúsenosti a „reálnym svetom" nazývať svet ideí.

Aj tak sa však nevyhneme otázke po pôvode nášho porozumenia čistým formám vtlačeným vždy len v skreslenej podobe reálnym objektom. Platónova filozofia na ňu dáva prekvapivo jednoduchú a konzistentnú odpoveď vo svojej teórii rozpomínania. Naša duša sa totiž rozpomína na idey, ktoré poznala v dobe, keď sa ešte nespojila s telom a sama prebývala v ríši ideí. Toto rozpomínanie je tým živšie a silnejšie, čím väčšmi sa duši darí odpútať sa od telesnosti.

Nie je dôležité, či sa s touto odpoveďou uspokojíme alebo nie. Každopádne však musíme uznať, že vyvrátiť ju nevieme a nič lepšie zatiaľ nemáme naporúdzi.

I keby sme spomínanú otázku prehliadli, klasické platónske riešenie by nás mohlo uspokojiť ešte tak vo svete malých prirodzených čísel alebo klasických geometrických útvarov. Míňa sa však cieľom vo svete nekonečných množín, o ktorý nám v týchto úvahách do značnej miery pôjde. Nielenže nemáme naporúdzi reálne objekty, cez ktoré by sa nám mohol otvoriť pohľad do sveta klasicky nekonečných množín, ale práve naopak máme rad dobrých dôvodov k presvedčeniu, že objekty schopné splniť túto úlohu sa v reálnom svete ani nevyskytujú.

Existencia ako možnosť

Na ideálny matematický svet sa nemusíme nutne dívať ako na nemenný svet, vytvorený a zavŕšený raz a navždy. Môžeme ho tiež chápať ako svet otvorený ďalšiemu tvoreniu, kam môžeme umiestňovať vždy nové a nové výtvory.

Pri takomto prístupe teda existenciu matematických objektov chápeme ako možnosť, presnejšie ako ich *uskutočniteľnosť*. Predpokladom uskutočniteľnosti, t. j. možnosti vytvorenia, je nejaký uskutočňovateľ či tvorca obdarený istými schopnosťami a mocou.

No možnosť nemusí nutne spočívať len na moci. Možnosť založenú na rozume budeme nazývať *bezospornosťou*. Nejaký objekt je bezosporný, ak pojmy, v ktorých sme ho uchopili, a súvislosti, do ktorých sú tieto pojmy zasadené, nevedú k sporu. Pritom pod sporom tu nerozumieme len formálny spor v rámci nejakej teórie, ale spor s akýmikoľvek rýdzo pojmovými pravdami, teda *spor s rozumom*. Bude užitočné si uvedomiť, že takýto spor vôbec nemusí byť očividný, naopak, môže byť ukrytý nesmierne hlboko, niekedy tak hlboko, že vyniesť ho odtiaľ na svetlo je nad ľudské sily.

Rozum nie je v spore so skutočnosťou, naopak, je nástrojom porozumenia pre ňu. Preto, čo je uskutočniteľné, to je i bezosporné. Na druhej strane uskutočniteľnosti niektorých bezosporných objektov môžu stáť v ceste také prekážky, ktoré

žiadna moc nedokáže prekonať. Teda obor bezosporného je obsiahlejší než obor uskutočniteľného.

Napríklad perpetuum mobile nie je uskutočniteľné. Jeho uskutočneniu bránia fyzikálne vlastnosti reálneho sveta. Na druhej strane, pokiaľ pojmy, v ktorých sme perpetuum mobile v myslení uchopili, nevsadíme dodatočne do súvislostí fyzikálnych zákonov, zostáva tento objekt ešte stále bezosporný.

Matematika otvára svoj ideálny svet ako svet neobmedzenej slobody duchovnej tvorby. Je teda v jej záujme túto slobodu, pokiaľ možno, ničím neobmedzovať. Na druhej strane tento svet nie je nejakým samoúčelom, matematika ho hodlá skúmať rozumom a z takto získaných poznatkov vyťažiť aj poznatky o reálnom svete. Musí to teda byť svet rozumný, t. j. podriadený zákonom rozumu. Naším zámerom teda je otvorenie takého ideálneho sveta, v ktorom by možnosť tvorenia bola obmedzená výlučne možnosťou bezosporného pojmového uchopenia v rozume. Inak povedané, chceli by sme, aby v ideálnom matematickom svete uskutočniteľnosť a bezospornosť znamenali to isté.

Obor všetkého uskutočniteľného však nemusí byť *kompatibilný*. To znamená, že uskutočnením nejakého objektu môžeme zabrániť uskutočniteľnosti nejakých iných objektov, ktoré pred jeho uskutočnením ešte uskutočniteľné boli. Tak napríklad v reálnom svete môže z nejakého vajíčka kvočka vysedieť kuriatko. Ak si však z neho urobíme praženicu, kuriatko budeme musieť oželieť.

Naproti tomu kompatibilita oboru všetkého bezosporného je zrejmá zo spôsobu, akým sme ho vymedzili. Pokiaľ sa teda o obore všetkých uskutočniteľných matematických objektov nepresvedčíme, že je kompatibilný, mali by sme k nemu, pre istotu, pristupovať tak, ako keby kompatibilný nebol. Zatiaľ si tiež nemôžeme dovoliť nerozlišovať medzi uskutočniteľnosťou a bezospornosťou.

Tak sa nám pôvodne zdanlivo jednoduchý pojem existencie rozpadá do troch rôznych významov, z ktorých ten nasledujúci je vždy všeobecnejší ako predošlý: uskutočnenosť, uskutočniteľnosť a bezospornosť. Okrem prvého prípadu máme potom do činenia s nezavŕšeným svetom ideálnych objektov. Ako uvidíme v kapitole venovanej intuicionizmu, pri skúmaní takého sveta však už nevystačíme s klasickým predikátovým počtom. Takisto nie je jasné, či logický kalkul, ktorý by sa na podobné štúdium hodil, nájdeme medzi súčasnými intuicionistickými, modálnymi, prípadne inými neklasickými logikami.

Vybudovať matematiku dôsledne postavenú na rozlišovaní rôznych modov existencie by bolo určite zaujímavé a, ako sme presvedčení, aj užitočné. Je to však dodnes sotva nahryznutý problém.

Uskutočňovanie bezosporného

Ak sme presvedčení, že ťažkosti plynúce z nekompatibility oboru všetkého uskutočniteľného v reálnom svete sa ideálneho matematického sveta netýkajú, tak sa zdá, že výkladu uskutočniteľnosti matematických objektov ako bezospornosti nestojí už nič v ceste. Zato sa pred nami vynára otázka, akej moci máme toto uskutočňovanie prenechať. Táto moc musí vedieť prekonať všetky prekážky a dokázať uskutočniť všetko, čomu nebránia zákony rozumu. Len tak možno naplniť náš zámer vyslovený v predošlom článku. Inak povedané, musí to byť moc všemohúca.

Záruku za takúto moc je ochotná prevziať zas len teológia, ktorá nám na tento účel ponúka do služby bytosť najdokonalejšiu, čiže i všemohúcu. Poznamenajme, že vševedúcnosť tejto bytosti sme už využili pri platónsko-teologickom poňatí.

Pri naznačenom poňatí, ktoré by sme mohli nazvať poňatím kreacionisticko-teologickým, teda prenechávame Bohu uskutočňovanie sveta možností *nášho* rozumu. Je otázne, či sme tým Božiu všemohúcnosť neprípustne neobmedzili. Ak však náš rozum chápeme ako podiel na univerzálnom rozume, poskytnutý nám z Božej milosti, a oprieme sa navyše o autoritu sv. Tomáša Akvinského, podľa ktorého zákonom sporu (no už ničím iným) je obmedzená i Božia moc (ani Boh nemôže učiniť, aby Sokrates nesedel, keď už raz sedel), ľahko sa utvrdíme v presvedčení, že náš pôvodný zámer sme už lepšie ani naplniť nemohli.

Pri skúmaní takéhoto ideálneho sveta však musíme rozlišovať medzi existenciou už uskutočnených objektov a existenciou ako uskutočniteľnosťou, teda používať existenčný kvantifikátor v dvojakom význame. Pravdivostná hodnota tvrdenia *„je uskutočnené X také, že ...“*, sa tak môže meniť v závislosti od toho, aké objekty už boli uskutočnené. Nemení sa pravdivostná hodnota tvrdení tvaru *„je uskutočniteľné X také, že ...“*, no zistiť ju nevieme často inak, než uchýlením sa do teologických špekulácií. Ako však uvidíme, keď budeme bližšie pojednávať o nekonečných množinách, môže sa stať, že povaha Božej všemohúcnosti si vynúti kladnú odpoveď súčasne na dve rôzne tvrdenia takéhoto typu, ktoré sú však navzájom v spore. V takom prípade teda môžu zlyhať i teologické motivácie.

Zatiaľ môžeme poslúžiť len nematematickým príkladom. Zrejme Všemohúci môže stvoriť človeka schopného zdvihnúť každý stvorený kameň. Rovnako môže stvoriť taký kameň, ktorý žiadna stvorená bytosť nezdvihne. Nemôže však naraz oboje.

Tento príklad nás upozorňuje na to, že nekompatibility oboru všetkého uskutočniteľného sa ani s Božou pomocou nezbavíme. S prekvapením, a niektorí vari aj so zdesením, tak zisťujeme, že v dôsledku podriadenia Boha rozumu sme Božiu moc napokon vykázali do podstatne užších medzí než sa jej pôvodne logický zákon sporu zdal vymedzovať.

Kvôli úplnosti ešte poznamenajme, že naše porozumenie nezavŕšenému svetu uskutočniteľných matematických objektov nemusíme nutne opierať len o teologické motivácie. Namiesto nich môžeme prijať tzv. konštruktivistické stanovisko, podľa ktorého uskutočniteľnosť sa potvrdzuje popisom istej činnosti, presnejšie, postupnosti úkonov, vedúcej k uskutočneniu daného objektu. Toto poňatie je nám na prvý pohľad bližšie, lebo chápe matematiku, a tým i tvorbu ideálnych matematických objektov ako špecifickú *ľudskú* činnosť.

Na obmedzenosť takéhoto naivného chápania konštruktivizmu však narazíme okamžite. Keďže ľudský uskutočňovateľ je schopný pracovať len určitou obmedzenou rýchlosťou a má k dispozícii len obmedzené množstvo času (určite menšie než, dajme tomu, 200 rokov – a to sme už voči nemu až nadmieru veľkorysí), väčšinu uskutočniteľných objektov nemôže uskutočniť. Podobných obmedzení sa nezbavíme, nanajvýš len rozšírime príslušné medze, ak nášmu uskutočňovateľovi dáme k dispozícii rôzne technické zariadenia umocňujúce jeho schopnosti. Od podobných obmedzení je konštruktivistické poňatie nútené abstrahovať.

Na druhej strane charakter konštruktivistického prístupu si vyžaduje vopred presne vymedziť prípustné metódy konštrukcie matematických objektov. S objavom každej kvalitatívne novej metódy tak tomuto poňatiu hrozí vážna kríza, zasahujúca samotné jeho základy. Bližšie sa týmito otázkami zatiaľ nebudeme zaoberať. Na vhodnom mieste sa k nim ešte raz vrátime.

Pozitivistické stanovisko

I keď sa nechceme vzdať akéhosi porozumenia ideálnemu matematickému svetu, ktorý sa nám otvoril, náš vzťah k celému radu „metafyzických" úvah, ktoré sme predviedli v predošlých článkoch, môže byť oprávnene skeptický. Takisto sa môžeme celkom oprávnene domnievať, že matematiku je nevyhnutné postaviť na nejaký podstatne pevnejší a všeobecne prístupnejší základ.

Matematické výsledky sú formulované v špeciálnom matematickom jazyku, pričom vyslovené v takomto tvare sa bezprostredne netýkajú nijakého ideálneho ani reálneho sveta. To je už vecou ich interpretácie. Ak sa teda v matematike máme vôbec na čomsi dohodnúť, musíme ustáliť presné gramatické pravidlá tohto jazyka a všetky matematické tvrdenia formulovať v tomto jazyku, prípadne dať aspoň jasný návod, ako to v tom-ktorom prípade možno urobiť.

Pri takomto prístupe sa však už čistá matematika prestáva vzťahovať k svetu (ani k reálnemu ani ideálnemu) a stáva sa z nej veda skúmajúca isté postupnosti symbolov, prípadne ich transformácie. Na druhej strane jej poznanie sa objektivizuje na najvyššiu možnú mieru, nakoľko jeho verifikácia sa redukuje len na kontrolu istých mechanicky vykonávaných operácií so znakmi.

Pozitivistické stanovisko teda spočíva v redukcii matematiky na jej symbolický jazyk. Hlavný dôraz pri takomto prístupe sa kladie na formálnu stránku matematických úvah, teda na axiomatickú metódu. Pri axiomatickej metóde vychádzame vždy z istého súboru axióm, zachytených v istom matematickom jazyku, a prostriedkami logiky z nich odvodzujeme ďalšie tvrdenia ako dôsledky. Tým dochádza k relativizácii pojmu pravdivosti. Pravdivosť takto dokázaných tvrdení treba totiž chápať výlučne v tom zmysle, že všetko, čo spĺňa východiskové predpoklady (axiómy), spĺňa aj ich logické dôsledky. Záruku za práve vyslovený záver preberá formálna logika.

Taktiež otázka existencie ideálnych matematických objektov sa takto prevádza na otázku dokázateľnosti príslušných existenčných tvrdení, zapísaných vo formálnom jazyku, z daných axióm.

Veľkou prednosťou matematických teórií spracovaných v takomto formálno-pozitivistickom duchu je ich prenosnosť na rôzne situácie. Len čo v nejakej oblasti matematiky objavíme nejaké javy, ktoré možno pomenovať pojmami našej teórie tak, že sú pritom splnené východiskové axiómy, tak okamžite máme poruke celý rad dôsledkov. Stačí urobiť príslušný preklad (interpretáciu) z jazyka jednej teórie do druhej, vychádzajúci zo slovníka kodifikovaného oným počiatočným pomenovaním.

Ak však chceme takúto formálnu teóriu aplikovať mimo matematiky, musíme si počínať už trochu opatrnejšie. Sotvaktoré okruhy javov reálneho sveta vyhovujú nejakým formálnym axiómam s absolútnou presnosťou. i keď je táto východisková zhoda veľmi presná, môže táto presnosť uzáverov odvodených dlhými logickými dôkazmi postupne klesať. Nemožno dokonca vylúčiť, že niektoré odvodené tvrdenia budú priamo odporovať realite. Táto poznámka sa však netýka len formálno-pozitivistického poňatia matematiky, ale má podstatne všeobecnejší charakter. Žiadne poňatie matematiky, ani matematika ako celok, ba vôbec žiadna oblasť ľudského poznania nie je poistená proti zlyhaniu pri aplikáciách.

2. Postavenie teórie množín v súčasnej matematike a jej vedúce zámery

Ak povieme, že celá súčasná matematika je založená na teórii množín, vedome tým síce prehliadneme niektoré ďalšie vývojové prúdy matematiky, no veľkej chyby sa aj tak nedopustíme. A štruktúra novodobých vyučovacích osnov nedáva ich absolventovi veľkú nádej túto našu nepresnosť odhaliť.

Väčšina matematických disciplín dnes formuluje svoje základné pojmy v termínoch teórie množín. Na prvý pohľad by sa teda mohlo zdať, že teória množín prevzala na seba len úlohu akého si všeobecného, spoločného matematického jazyka. Hoci toto samo by nebolo málo, postupne vychádza stále zreteľnejšie najavo, že dôsledné a najmä bezstarostné používanie množinového jazyka uvádza matematiku priamo do sveta teórie množín, a tak, v istom zmysle, podriaďuje ostatné matematické disciplíny tejto teórii.

Toto výsadné postavenie v rámci matematiky nenadobudla teória množín náhodou, ale preto, lebo v nej došlo k odvážnemu zavŕšeniu a kanonizovaniu predstáv rozvíjaných najvplyvnejším vývojovým prúdom matematiky, a to v dobe, keď sa vnútorná jednota matematiky začala už dávno prejavovať a potreba zjednotenia matematiky, t. j. potreba dať tejto prejavenej jednote akúsi inštitucionalizovanú podobu, naplno pociťovať.

Len mimochodom spomeňme Descartov objav súradnicovej sústavy, ktorý dával do súvisu klasickú geometriu s algebrou a analýzou, alebo Leibnizov a Newtonov objav infinitezimálneho počtu, ktorý, popri matematickej teórii pohybu, tiež umožnil zvládnuť rôzne zložité geometrické útvary pomocou útvarov elementárnych.

Zámer teórie množín pojať do seba celú matematiku sa prejavoval a dozrieval len veľmi pozvoľna a naplno bol vyslovený až približne v polovici tohto storočia napríklad Nicolasom Bourbakim, podľa ktorého matematika je štúdium rôznych množinových štruktúr. Prvý rozhodujúci krok v tomto smere bol však učinený už dávno predtým, keď sa Cantorovi a Dedekindovi podarilo vybudovať kanonický model reálnych čísel v teórii množín. Tým dostala pevný základ vtedajšia vládnuca matematická disciplína – analýza, čo umožnilo vyhnúť sa v nej ťažkostiam spojeným s nekonečne malými veličinami a kanonizovať tzv. $\varepsilon\delta$-techniku. Na druhej strane tým matematická analýza prestala byť infinitezimálnym kalkulom v pravom zmysle tohto slova a ako jedna z prvých sa stala štúdiom istej množinovej štruktúry. K tomu tiež nemalou mierou prispel nový množinový výklad funkcie ako množiny usporiadaných dvojíc spĺňajúcich známu podmienku jednoznačnosti.

Zhodne podľa Bolzana i Cantora je množina súhrn nejakých ľubovoľných, často i značne rôznorodých objektov – prvkov množiny – v jeden celok. Nejaká množina je tak *samostatný, jediný objekt* jednoznačne určený zoskupením svojich prvkov, nezávisle od spôsobu ich spojenia. Teda prvky sa na vytvorení množiny podieľajú len samotnou svojou prítomnosťou. V príkrom rozpore s mnohými učebnicami rozšírenými najmä na základných a stredných školách si tak dovolíme tvrdiť, že pojem množiny nie je zďaleka takým prirodzeným pojmom, ako sa nám ich autori snažia nahovoriť, a to hneď z dvoch dôvodov. Nejaká množina je totiž ideálny objekt, ktorý vytvárame až aktom myslenia tak, že si nejaké, často i značne početné či dokonca „nekonečné" zoskupenie objektov vyložíme ako objekt jediný, a navyše dôsledne abstrahujeme nielen od vlastností jednotlivých objektov, no taktiež od akýchkoľvek väzieb a vzťahov medzi nimi.

Toto všetko môže niekomu pripadať len ako samoúčelná hra so slovíčkami. V skutočnosti má však práve takýto prístup k množinám nedozerný význam tak pre teóriu množín samotnú, ako aj pre matematiku v teórii množín. Tým, že si jednotlivé množiny vykladáme ako objekty, môžeme ich opäť zoskupovať a tvoriť tak množiny týchto množín, množiny množín množín atď., čím sa pred teóriou množín otvárajú nové netušené obzory. Len ako celkom jednoduchý príklad si uvedomme, že je podstatný rozdiel, či z množín $\{0\}$, $\{0,1\}$ vytvoríme množinu $\{\{0\},\{0,1\}\}$ t. j. obvyklý množinový model usporiadanej dvojice objektov 0, 1), alebo len jednoducho zoskupíme ich prvky do množiny (množinový model neusporiadanej dvojice objektov 0, 1).

Ešte dôležitejšia črta takéhoto prístupu k množinám je ukrytá v tom, že si ako množiny, t. j. ako samostatné objekty, vykladáme ľubovoľné zoskupenia objektov, často i bez toho, že by sa nám vôbec zoskupené ukazovali. Takže ich zoskupujeme vlastne až dodatočne, v myslení, zároveň ako tvoríme ich mno-

žinu. Tým však dochádza k neobyčajnému rozšíreniu a obohateniu, no niekedy i k zanešváreniu rôznych oborov objektov skúmaných tradičnými matematickými disciplínami o objekty nové, ktoré nielenže nemôžeme nazerať, ale nevieme si ich ani predstaviť, a ktorým by sme sa pred prijatím množinového stanoviska asi zdráhali vôbec priznať existenciu. Tak napríklad okrem klasických rovinných geometrických útvarov, ako sú priamky, štvorce, kružnice a pod., ktoré si teraz vykladáme ako množiny bodov na nich ležiacich, objavujú sa v tomto novom svetle rôzne podivné útvary, ako trebárs krivky zapĺňajúce štvorec alebo nemerateľné množiny. Podobne aj obor reálnych funkcií sa obohatil nielen o funkcie, ktoré si vôbec nevieme predstaviť, ako napríklad Bolzanovu spojitú funkciu, ktorá nemá nikde deriváciu, ale aj o funkcie, ktoré z principiálnych dôvodov nemožno zadať nijakým predpisom, čo značne protirečí nášmu pôvodnému prirodzenému porozumeniu pre tento pojem.

Pritom názory na podobné otázky sa zvyknú časom značne meniť. Mnohé matematické objekty, ktoré sa kedysi považovali len za akési patologické kontrapríklady príliš všeobecných hypotéz, alebo za síce zábavné, no na nič nie súce kratochvíle, sa môžu zrazu ocitnúť v centre pozornosti, či už pre svoj teoretický význam, alebo užitočnosť v aplikáciách, a zaradiť sa tak do radu „dôstojných" a „vážených" obyvateľov matematického sveta.

Za všetky príklady spomeňme len fraktály – geometrické objekty s neceločíselnou dimenziou, ktorých vlastnosti, kedysi považované za patologické, sú dnes, vďaka ich počítačovému zobrazeniu, zdrojom silných estetických zážitkov. A ich ideálne formy, ktoré by sme kedysi len neochotne zahliadli v geometrickom svete, naraz nachádzame priamo v prírode div nie na každom kroku.

Teória množín však často umožňuje vykladať i rôzne vlastnosti objektov či vzťahy medzi objektmi ako množiny, teda vykladať ako objekty i rôzne sprievodné javy ukazujúce sa na objektoch, ktoré si bežne ako objekty nevykladáme. Tak napríklad vlastnosť niektorých ľudí „mať modré oči" potom nahrádzame množinou všetkých modrookých ľudí a vzťah otcov k synom množinou všetkých usporiadaných dvojíc mužov, z ktorých prvý je otcom druhého. Vidíme teda, že v podstate podvedomý zámer teórie množín – vyložiť čo najviac javov ako objekty – má značný metodologický dosah. Prezraďme už vopred, že tento objektivizačný zámer má svoje medze, teda nie je do dôsledku uskutočniteľný. Na druhej strane práve snaha o dôsledné napĺňanie tohto zámeru je do značnej miery zodpovedná za ťažkosti, v ktorých sa teória množín ocitla na prelome 19. a 20. storočia.

Posledným z vedúcich zámerov teórie množín, o ktorom sa tu zmienime, a ktorý sme vzhľadom na svoju reprezentatívnosť a pripisovanú mu dôležitosť, mali uviesť vlastne na prvom mieste, je snaha o jednotný výklad javu nekonečna či aspoň výskytov tohto javu v matematike prostriedkami teórie množín. Keďže rôzne prístupy k výkladu nekonečna sa stali zdrojom najvážnejších ideových stretnutí a filozofických sporov, považujeme historický prierez práve touto problematikou za najvhodnejší spôsob, ako uviesť čitateľa do filozofických otázok teórie množín a základov matematiky.

Najprv však nezaškodí v krátkosti si vyjasniť, čo je to za nekonečno, ktoré matematika učinila predmetom svojho skúmania.

3. Matematické nekonečno

Nekonečno sa tradične vo filozofii i v matematike chápe ako negatívna kategória; nekonečné je to, čo nie je konečné. Ak teda chceme vyložiť jav *nekonečna,* či ho dokonca skúmať matematickými prostriedkami, musíme si najprv vyjasniť, na základe čoho niektoré javy prehlasujeme za *konečné*.

Pritom vedome ponechávame stranou možné špekulácie o negatívnosti konečného (ohraničenosť či prítomnosť konca sú negatívne určenia, teda naopak, nekonečno, charakterizované ich neprítomnosťou, je pozitívna, a konečno ako jeho negácia, negatívna kategória), lebo v smere našich zámerov by nás neposunuli anio piaď. Skôr by nás zaviedli na hegeliánske scestie.

Konečné je teda to, čo má koniec; aby sme však niečo mohli oprávnene za konečné prehlásiť, musíme to najprv v jeho konečnosti uchopiť, to znamená i tento koniec uvidieť. Už na tomto mieste je zrejmé, že výklad javu konečna, prípadne nekonečna, nie je vôbec jednoduchou záležitosťou, pretože hneď od samého začiatku sa nám ponúkajú dva zásadne odlišné prístupy.

Každý náš pohľad, nech ho vedieme ktorýmkoľvek smerom, je – pokiaľ mu nestojí v ceste nejaká pevná prekážka, ktorá ho ostro ukončuje – ohraničený *obzorom*, smerom, ku ktorému sa jasnosť nášho pohľadu vytráca, a čo je za týmto obzorom, to už nevidíme vôbec. Tak je to nielen pri pohľade do diaľky, t. j. smerom k čoraz väčším vzdialenostiam, keď sa pred nami otvára obzor dosiahnuteľnosti, no i pri pohľade smerom do hĺbky, t. j. k vzdialenostiam čoraz menším, keď sa pred nami vynára obzor rozlíšiteľnosti nášho pohľadu. Pre istotu ešte poznamenajme, že pohľadom tu nerozumieme len pohľad zrakom, ale ľubovoľné vedomé zmyslové, prípadne i čiste myšlienkové uchopenie nejakého javu.

Čo obsiahneme jediným pohľadom pred obzorom ohraničujúcim jasnosť nášho pohľadu, môžeme oprávnene prehlásiť za konečné. Ak si javy, ubiehajúce až k tomuto obzoru, vyložíme ako nekonečné, hovorímeo takzvanom *prirodzenom* nekonečne.

Obzoru však nerozumieme ako hranici sveta, ale ako hranici nášho pohľadu na svet. Obzor nie je vo svete pevne umiestnený, ale zaostrením pozornosti ho môžeme oddialiť, prípadne jej otupením sa k nám priblíži. Svetu teda rozumieme tak, že plynule pokračuje aj za obzorom, hoci tam ho práve nevidíme. Ukazujúci sa obzor je tak javom neostrým, a nie je javom samotného objektívneho sveta, lež javom sprevádzajúcim náš pohľad na svet, teda javom subjektívnym.

Z toho tiež vyplýva, že to, čo sa nám pri nejakom pohľade javí ako prirodzene nekonečné, môže sa po zaostrení tohto pohľadu dostať celé pred obzor, teda javiť sa konečným.

Z dôvodov, ktoré si tu nemôžeme dovoliť rozoberať, je takýto prístup k štúdiu konečna a nekonečna nezlučiteľný so statusom klasickej objektívnej vedy. Pri klasickom objektivistickom prístupe sa nestaráme o to, akým sa nám niečo javí, ale o to, aké to „samo osebe”, teda „objektívne ako také”, je. Pritom nechajme bokom neľahkú otázku, čo tie slovné spojenia v úvodzovkách vlastne znamenajú a či majú vôbec zmysel, prípadne, či je takýto ideál pre nás dosiahnuteľný. Špeciálne nám v tomto prípade nejde o to, či sa nám niečo javí ako konečné, t. j. leží práve pred obzorom, ale o to, či to naozaj objektívne je konečné raz a navždy. *Absolútne* nekonečným potom nazývame to, čo nie je v takomto zmysle konečné.

Na druhej strane, nech akokoľvek oddialime obzor nášho pohľadu, teda prekročíme dovtedajší obzor, obzor ako taký sa nám prekonať nepodarí. Náš ďalej dosahujúci či hlbšie prenikajúci pohľad bude opäť ubiehať k tomuto vzdialenejšiemu obzoru. Samotný jav obzoru, na rozdiel od jednotlivých výskytov tohto javu, je teda javom navýsosť objektívnym. Objektívna prirodzená nekonečnosť sveta spočíva práve v nemožnosti prekonať v ktoromkoľvek smere takto poňatý jav obzoru, to znamená v nemožnosti vylúčiť subjektívne prirodzené nekonečno. Ak si túto objektívnu prirodzenú nekonečnosť sveta vyložíme ako absolútne nekonečnú, budú nositeľmi absolútneho nekonečna jedine javy ubiehajúce „až na samý kraj sveta”, teda za všetky pomyselné obzory. No nemožnosť prekonať obzor robí tiež nemožným o čomkoľvek overiť, že je to „objektívne” absolútne nekonečné. Absolútnu nekonečnosť teda môžeme niektorým javom iba priznať na základe nejakého výkladu. Tieto výklady však už môžu byť pomerne ľubovoľné.

Ak sa teda chceme vyhnúť agnostickému záveru o principiálnej nemožnosti poznať absolútne nekonečno, musíme vypracovať nejaký kanonický výklad tohto pojmu, ktorému by sme pred všetkými ostatnými dali prednosť. Na také niečo sa cíti povolaná len teológia. Tradične bola totiž aktuálna absolútna nekonečnosť ako atribút pripisovaná výlučne Bohu (hlavne pokiaľ ide o mieru Jeho Múdrosti, Moci, Dobroty a Milosti), kým všetky stvorené bytosti vrátane človeka (a tým aj jeho schopnosti), bez toho, že by bolo jasné, čo to znamená, boli prehlásené za konečné. Celok stvoreného bol zvyčajne chápaný ako potenciálne (opäť absolútne) nekonečný, lebo i moc a možnosti (potencie) Stvoriteľa sú nekonečné. Aktuálnu nekonečnosť sveta prehlásil a teologickými argumentami zdôvodňoval Giordano Bruno. A hoci to zrejme nebol jediný dôvod, všetci vieme, ako skončil.

Teologické motivácie skutočne zohrali významnú úlohu pri vypracúvaní výkladu absolútneho nekonečna. Umožňujú nám totiž naše nedokonalé, ohraničené, a tým nutne i konečné poznávanie oprieť o nekonečné poznanie dokonalej, vševedúcej a všemohúcej bytosti, a tak mu zaručiť akýsi status objektívnosti. Teda rozumom môžeme postupne poznávať to, čo Boh obsiahne jediným pohľadom.

Výklad absolútneho nekonečna teda vypracúvame tak, že sa pokúšame vmyslieť do situácie, v ktorej by sme svet videli „Božími očami". V tejto chvíli však presne v zhode s Feuerbachovým rozborom podvedome začíname „tvoriť Boha na svoj obraz". Teda náš Boh vidí celý svet tak, ako my vidíme svet pred obzorom, čím obzor odďaľujeme až do absolútneho nekonečna a absolútnemu nekonečnu podsúvame atribúty nekonečna prirodzeného. To samo osebe by ešte nebolo také zlé; práve naopak, dovolíme si tvrdiť, že abstrakcia absolútneho nekonečna sa v matematike ukázala užitočnou a plodnou hlavne v tých smeroch a potiaľ, pokiaľ sa nerozišla s nekonečnom prirodzeným a dokázala si zachovať jeho charakteristiky, t. j. pokiaľ ju možno aspoň dodatočne podložiť nejakou podobou javu obzoru.

V minulom storočí sa však teologické motivácie už dávno netešia medzi vedcami obľube. Jednako porozumenie pre nekonečno ako pre nekonečno absolútne sa v tomto období na pôde matematiky definitívne kanonizuje, keďže stratené porozumenie pre nekonečno prirodzené sa do tých čias v rámci klasickej objektívnej vedy nestihlo obnoviť, a nikto sa o to ani nepokúšal. Neostáva teda iné, než na teologické motivácie zabudnúť a prijať absolútne nekonečno bez nich. O to hlbšie sa však teologické motivácie usadili v hlbokom podvedomí matematikov, čo, keďže nereflektované, je postavenie niekedy ešte vplyvnejšie.

Ešte poznamenajme, že i pri pohľade do vlastného vnútra sa stretávame s rôznymi výskytmi javu obzoru, a tým tiež s prirodzeným nekonečnom. Teda človek, no rovnako vari každý jav živej i neživej prírody, je v našom poňatí nositeľom rôznych podôb prirodzeného nekonečna.

V zhode s naším porozumením pre obzor si javy ubiehajúce k obzoru vykladáme ako plynule pokračujúce ešte aspoň kúsok za obzorom. Naše porozumenie pre prirodzené nekonečno je teda porozumením pre nekonečno uskutočnené, t. j. *aktuálne*. Chápať prirodzené nekonečno ako *potenciálne* môžeme leda dovtedy, kým nedôjde k oddialeniu príslušného obzoru. Aktualizácia potenciálneho prirodzeného nekonečna tak tesne súvis s oddialením obzoru, čím sa však pôvodne nekonečné qdotvára a stáva konečným.

Naproti tomu k abstrakcii absolútneho nekonečna dospievame postupným a opätovným odďaľovaním obzoru. Absolútne nekonečno je tak myslenou medzou, kam až môžeme obzor oddialiť. No keďže oddialením obzoru sa samotného obzoru nijako nezbavíme, vystupuje pred nami absolútne nekonečno v podobe potenciálnej, ani nie tak ako medza, lež iba ako číra možnosť stále ďalšieho odďaľovania obzoru.

Snaha o aktualizáciu absolútneho nekonečna tak nie je ničím iným, než snahou o rozšírenie takéhoto výkladu nekonečna prirodzeného aj na absolútne nekonečno.

Na prvý pohľad sa môže zdať, že teologickým prístupom hravo zvládneme i tento problém, lebo tak, ako my sme schopní uchopiť prirodzené nekonečno v jeho uskutočnení, dokáže Boh uchopiť nekonečno absolútne. Keď sa však pokúsime aplikovať našu úvahu o oddialení obzoru na celý svet, presnejšie „kraj sveta", zistíme, že aktualizácia absolútneho nekonečna núti Boha najprv vystúpiť zo sveta von, niekam do zásvetia. I to by sme ešte stále mohli pripustiť. Potom však svet pred Božím pohľadom neubieha podobne, ako nám ubieha k obzoru tá časť sveta, ktorú vidíme, ale leží pred ním, takpovediac, ako na dlani, podobne ako pred nami leží nejaký konečný jav.

Aktualizáciou absolútneho nekonečna teda na toto nekonečno neprenášame atribúty prirodzeného nekonečna, ale atribúty konečna. Aktuálne nekonečno je tak abstrakciou značne chúlostivou a ošemetnou, pokúšajúcou sa v sebe stmeliť znaky prirodzeného nekonečna so završenosťou bez toho, aby ho tým zvrátilo v konečno. Navyše sa potom stáva načisto nejasným, aké znaky má aktuálne nekonečno podediť od prirodzeného nekonečna a aké od konečna. Niet sa teda čo diviť, že aktuálne absolútne nekonečno dalo podnet k toľkým sporom. Všetky tieto spory však už prebiehali bez prihliadnutia k nekonečnu prirodzenému. Pod nekonečnom sa totiž v matematike odvtedy až podnes rozumelo takmer výlučne to, čo tu nazývame nekonečnom absolútnym. A tak sa celá diskusia okolo nekonečna v matematike sústredila na otázku oprávnenosti jeho aktualizácie.

Pritom až do vzniku teórie množín sa toto nekonečno chápe výlučne, snáď len s výnimkou sv. Augustína, Giordana Bruna a čiastočne Gottfrieda Wilhelma Leibniza, u ktorého sa striedavo vyskytujú obidve poňatia, ako nekonečno potenciálne. Ak sa aj aktuálne nekonečno objaví v nejakej úvahe, tak zväčša s úmyslom od jeho štúdia odradiť. Úvahy nad Zenónovými apóriami, podobne ako niektoré argumenty proti pôvodnému infinitezimálnemu počtu sú toho príkladom.

A opäť vstupuje do hry teologické hľadisko. Tento raz však vedie k výkladu, podľa ktorého štúdium aktuálneho nekonečna je neprípustným zasahovaním do Božej právomoci. To bolo tiež jednou z príčin nedôvery toľkých matematikov k Leibnizovým aktuálne nekonečne malým či nekonečne veľkým veličinám A ťažkosti a spory, ku ktorým v infinitezimálnom počte čas od času dochádzalo, sa potom dali vykladať len ako zaslúžené tresty za tento hriech. S objavom možnosti eliminovať Leibnizove nekonečne malé a nekonečne veľké veličiny pomocou limít a $\varepsilon\delta$-techniky, ktoré sa vo svojej pôvodnej podobe zakladajú na prístupe k nekonečnu ako potenciálnemu, je tak ich osud nadlho spečatený.

O obnovenie Leibnizovho infinitezimálneho počtu – ak ponecháme stranou niektoré skoršie nie celkom dotiahnuté pokusy – sa zaslúži až v šesťdesiatych rokoch 20. storočia takzvaná neštandardná analýza, vybudovaná Abrahamom Robinsonom.

No podarí sa jej to len za cenu zložitého modelovania týchto javov v teórii množín a ich podriadenia zámerom klasickej $\varepsilon\delta$-analýzy.

Cestu prirodzenému nekonečnu začne do matematiky kliesniť až o ďalších desať rokov neskôr takzvaná alternatívna teória množín objavená Petrom Vopěnkom, ktorá sa okrem iného tiež pokúsi o nový výklad infinitezimálneho počtu pomocou prirodzene nekonečne malých a prirodzene nekonečne veľkých veličín a porozumenia pre dynamiku javu obzoru. Treba však poctivo dodať, že tento pokus sa za prvé kroky zatiaľ nedostal.

Ale to už značne predbiehame. Na tomto mieste len poznamenajme, že porozumenie pre prirodzené nekonečno sa bez prerušenia udržalo až podnes na pôde fyziky. Keďže fyzika si nikdy nekládla za cieľ učiniť samotný jav nekonečna predmetom svojho skúmania, nikdy ani nepocítila potrebu tento pojem objektivizovať, čo, ako sme už videli, viedlo k jeho absolutizácii v matematike. O tom svedčí i bežné používanie nekonečne malých a nekonečne veľkých veličín pri rôznych výpočtoch, ktorého sa fyzici, často na veľkú neľúbosť svojich matematických kolegov, nikdy celkom nevzdali. Ich dôvera v pôvodný infinitezimálny kalkul zostala natoľko neotrasená, že si dokonca ani príliš nevšimli snahy neštandardnej analýzy tento ich osvedčený nástroj rehabilitovať a znovu legalizovať na pôde matematiky. Na druhej strane niektoré fyzikálne otázky so značným filozofickým dosahom, ako napríklad otázka konečnosti či nekonečnosti vesmíru, sú zrejme bez dôkladnej precizácie týchto pojmov i na pôde fyziky, samozrejme s prihliadnutím na mnohé z toho, čo už o nich vie matematika, principiálne neriešiteľné, ak nie priam nezmyselné.

4. Počiatky teórie množín u B. Bolzana

Historicky prvú podobu teórie množín rozpracoval Bernard Bolzano (1781-1848) vo svojom diele *Paradoxy nekonečna*, vydanom až po jeho smrti r. 1851. Pritom pojem množiny sa vyskytol už v jeho fundamentálnom diele *Vedoslovie* z r. 1837, venovanom analýze logických, metodologických a filozofických predpokladov zdôvodnenia vedeckého poznania.

Zámer, s ktorým Bolzano svoju teóriu množín rozvíja, je výklad javu nekonečna. Presnejšie, Bolzano sa snaží doložiť, že ľubovoľný výskyt javu nekonečna je vyvolaný nejakým nekonečným množstvom objektov, či aspoň ho možno na takéto nekonečné množstvo objektov dodatočne previesť. Štúdium javu nekonečna možno tak zredukovať na štúdium príslušného nekonečného oboru objektov.

Bolzanovo porozumenie pre nekonečno je klasické, to znamená, že pod nekonečnom rozumie vždy len nekonečno absolútne. Bolzanovým zámerom pritom je študovať toto nekonečno v aktualizovanej podobe. Keďže nejakú množinu môžeme vytvoriť, až keď sú už vytvorené všetky jej prvky, je práve nekonečno prítomné v *nekonečných množinách* nekonečnom aktuálnym. Nositeľmi aktuálneho nekonečna sa tak v Bolzanovom poňatí stávajú nekonečné množiny. Po príklady nekonečných množín siaha Bolzano do matematiky, je si totiž vedomý toho, že v reálnom svete by len tak ľahko neuspel. No nielen to – klasické matematické obory, ako napríklad prirodzené čísla, geometrický priestor a pod. možno tiež vykladať ako nekonečné len potenciálne – Bolzanovou úlohou teda je vykázať oprávnenosť ich aktualizácie. Inak povedané, Bolzano musí najprv presvedčiť čitateľa, že existuje aspoň jedna nekonečná množina.

Bolzano si veľmi dobre uvedomuje, že vzhľadom na charakter absolútneho nekonečna musí „dôkaz" existencie nekonečnej množiny presahovať rámec reálneho sveta. Prostriedkom prekonania tohto rámca sú mu teologické úvahy. Bolzano skutočne podáva dôvtipný dôkaz, v ktorom v podstate metódou matematickej indukcie opíše návod na zostrojenie nekonečne mnohých „právd osebe". Aktualizáciu tohto, zatiaľ možno iba potenciálne nekonečného oboru, mu zaručuje Božia vševedúcnosť: Bolzano uzatvára, že všetky tieto pravdy, t. j. nekonečná množina týchto právd, sú v uskutočnení prítomné v mysli Božej.

Od tejto chvíle sa už Bolzanova teória množín môže nerušene rozvíjať. Bolzano je však pri priznávaní existencie rôznym nekonečným oborom objektov, teda pri vytváraní nekonečných množín, značne opatrný. Starostlivo rozlišuje medzi množinami už uskutočnenými a množinami uskutočniteľnými, t. j. tými, ktoré len možno vytvoriť. Teda k oboru nekonečných množín pristupuje podobne ako pristupujeme napríklad k prirodzeným číslam, pokiaľ ich nekonečno chápeme len ako potenciálne. Touto opatrnosťou však svoju teóriu množín vopred poistil pred podobnými spormi, do akých neskôr upadla teória množín Cantorova.

Bolzano tiež znovu objavuje zdanlivý paradox, známy už Thomasovi Bradwardinovi (1290?-1349) a Galileovi Galileimu (1564 -1642), podľa ktorého medzi nekonečnými množinami neplatí všeobecne zásada „celok je väčší ako časť", celkom samozrejmá medzi konečnými množinami. Tento princíp neskôr Richard Dedekind (1831-1916) povýši priamo na definíciu nekonečnej množiny: „Množina je nekonečná, ak ju možno vzájomne jednoznačne zobraziť na nejakú jej vlastnú podmnožinu."

Jedným dychom s týmto princípom však Bolzano vyslovuje princíp ešte jeden, ktorý v súčasnej terminológii znie takto: „Ľubovoľné dve nekonečné množiny možno na seba vzájomne jednoznačne zobraziť."

V dôsledku tohto princípu, Bolzanovej opatrnosti a toho, že Bolzano ďalej čerpá svoje nekonečné množiny už len z oborov matematických objektov dovtedy študovaných ako potenciálne nekonečné, tieto jeho množiny neprekračujú rámec prirodzeného názoru a možno ich tak či onak umiestniť do priestoru. Tým je tiež zaručené pevné spojenie jeho teórie s realitou.

Bolzano žil v Prahe – a neskôr, keď ho pre jeho teologické učenie nezlučiteľné s oficiálnymi cirkevnými dogmami a najmä jeho pokrokové (i keď zjavne utopické) názory na sociálne otázky zbavili profesúry na Karlovej Univerzite a stal sa terčom prenasledovania rakúskych úradov, uchýlil sa dokonca na vidiek ťeda bokom od centier vtedajšieho vedeckého diania. Jeho teória množín, ktorú ostatne ani nedoviedol do završenej podoby, zostala dlho, podobne ako jeho mnohé iné významné matematické objavy, takmer nepovšimnutá. Jeho prácami z logiky a filozofie vedy sa, okrem Franza Brentana, výraznejšie inšpirovali až v našom storočí Edmund Husserl a niektorí predstavitelia poľskej logickej školy, najmä Jan Lukasiewicz a Alfred Tarski.

Výnimku tvorí snáď len Georg Cantor (1845-1918), ktorý vysoko ocenil Bolzanov príno s pre teóriu množín. Zdá sa však, že s Bolzanovými *Paradoxmi nekonečna* sa zoznámil až v dobe, keď základné myšlienky svojej teórie množín už zverejnil a bol nútený brániť svoju koncepciu aktuálneho nekonečna pred rôznymi, často nevyberanými útokmi. Preto uvítal každé dielo z minulosti, ktorým by toto svoje poňatie mohol podoprieť. Na druhej strane odlišnosti Bolzanovej teórie od svojej vlastnej Cantor považoval za Bolzanove omyly. Ako príklad nám môže poslúžiť už spomínaný Bolzanov princíp ekvivalencie nekonečných množín, ktorý je v spore s princípom, podľa ktorého nijakú množinu nemožno zobraziť na množinu všetkých jej podmnožín, či s nespočítateľnosťou množiny všetkých reálnych čísel, dokázanými Cantorom. Takáto interpretácia Bolzanovej teórie množín bola všeobecne prijímaná až do sedemdesiatych rokov nášho storočia.

Z týchto odlišností Bolzanovej a Cantorovej teórie množín však môžeme vyvodiť i celkom protichodný záver, totiž, že sa mýli Cantor – a po ňom skoro celá matematika – keď považuje za aktualizovateľný obor $\mathcal{P}(X)$ všetkých podmnožín nekonečnej množiny X či obor vôbec všetkých reálnych čísel. Cantorov dôkaz, podľa ktorého pre ľubovoľné zobrazenie $f : X \to \mathcal{P}(X)$ možno diagonálnou metódou zostrojiť množinu

$Y = \{x \in X\,;\, x \notin f(x)\}$ takú, že platí $Y \in \mathcal{P}(X)$, no $Y \neq f(x)$ pre každé $x \in X$, možno chápať aj ako návod umožňujúci pre ľubovoľnú množinu A podmnožín nekonečnej množiny X zostrojiť množinu $Y \subseteq X$, $Y \notin A$. Podobne Cantorov dôkaz nespočítateľnosti oboru reálnych čísel možno tiež chápať ako dôkaz nemožnosti vyčerpať obor reálnych čísel akoukoľvek ich množinou. Hocako veľkú množinu reálnych čísel si vezmeme, podľa Bolzanovho princípu ju môžeme očíslovať prirodzenými číslami a Cantorovou metódou potom vždy vieme zostrojiť nejaké nové reálne číslo, ktoré do tejto množiny nepatrí.

Pritom nebude bez zaujímavosti si uvedomiť, že sme sa práve stretli s dvoma navzájom si odporujúcimi princípmi týkajúcimi sa nekonečných množín, z ktorých každý možno zdôvodniť a motivovať teologickými argumentami. Na prvý pohľad sa zdá, že ak sú množiny stále väčších a väčších mohutností možné, t. j. bezosporné, tak ich uskutočnenie je v Božej moci, teda prijatie Cantorovho stanoviska je už predpojaté v našom zámere po stotožnení oborov všetkého bezosporného a uskutočniteľného. Na druhej strane ak X, Y sú nekonečné množiny, tak vzájomne jednoznačné zobrazenie X na Y je tiež bezosporné, teda z rovnakých teologických dôvodov aj uskutočniteľné, čo pre zmenu dáva za pravdu Bolzanovi. Môžeme sa teda rozhodnúť: buď budeme mať v univerze množín „bohatú" štruktúru nekonečných mohutností a „chudobný" obor zobrazení, lebo „bohatý" obor zobrazení a jedinú nekonečnú mohutnosť. Pritom druhá možnosť v sebe tú prvú implicitne zahŕňa: obmedzením sa na vhodné zobrazenia špeciálnych vlastností sa rôzne, nie nutne len cantorovské, štruktúry nekonečných mohutností pred nami opäť vynoria.

Bolzanova a Cantorova teória množín sú teda dve podstatne odlišné teórie, do istej miery podobne ako Euklidova a Bolyaiho-Lobačevského geometria. Bolzanovu teóriu množín dosiaľ nikto sústavne nerozvíjal a už tobôž sa nepokúsil založiť na nej matematiku. Ani v dobe krízy Cantorovej teórie množín sa nikto nepokúšal hľadať východisko, ktoré sa u Bolzana samo ponúkalo. V Bolzanovom diele teda stále ostáva mnohé, čím by sme sa mohli podnes inšpirovať. Do značnej miery tento dlh voči veľkému mysiliteľovi spláca alternatívna teória množín.

5. Vznik teórie množín v diele G. Cantora

Vznik teórie množín je nerozlučne spätý s menom Georga Cantora. A dodajme rovno, že plným právom. Cantor nielenže vypracoval svoje poňatie teórie množín, ktoré podnes ostáva jej takmer výlučným poňatím, no taktiež zaviedol a rozpracoval väčšinu základných pojmov tejto teórie a dokázal o nich viacero fundamentálnych tvrdení, ktoré už navždy zostanú v zlatom fonde matematiky.

Hoci Cantorovo matematické dielo nesie hlbokú pečať silnej filozofickej invencie svojho tvorcu, pôvodné zámery, ktoré Cantora k štúdiu teórie množín viedli, neboli filozofickej či metafyzickej povahy ako zámery Bolzanove. Cantor sa k teórii množín dopracúva akosi mimovoľne, v snahe o riešenie konkrétnych matematických problémov svojej doby. Tri z nich, ktoré mali pre vznik teórie množín základný význam, si tu všimneme trochu bližšie, hoci len v nevyhnutne zjednodušenej podobe.

Rozklad funkcie f do Fourierovho radu

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m \cos mx + b_m \sin mx)$$

sa ukázal mimoriadne elegantným a účinným nástrojom pri popise rôznych fyzikálnych dejov (akustika, vlnová optika, vedenie tepla), zostavovaní a riešení diferenciálnych rovníc i pri čiste štrukturálnych skúmaniach reálnych aj komplexných funkcií. Neskôr bola táto teória ďalekosiahle zovšeobecnená a jej význam ešte mnohonásobne vzrástol.

Pre túto teóriu má značný význam otázka jednoznačnosti rozkladu funkcie do Fourierovho radu. Presnejšie možno túto otázku sformulovať takto:
Nech f, g sú reálne funkcie definované na intervale $\langle 0, 2\pi\rangle$, s Fourierovými rozvojmi

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m \cos mx + b_m \sin mx), \\ g(x) &= \frac{1}{2}c_0 + \sum_{m=1}^{\infty}(c_m \cos mx + d_m \sin mx) \end{aligned}$$

Pre „koľko“ bodov $x \in \langle 0, 2\pi\rangle$ nám stačí vedieť, že $f(x) = g(x)$, aby sme mohli tvrdiť, že $a_0 = c_0$ a $a_m = c_m$, $b_m = d_m$ pre každé m, a v dôsledku toho tiež $f = g$ na celom intervale $\langle 0, 2\pi\rangle$? Inak povedané, „koľko“ výnimiek z rovnosti $f(x) = g(x)$ ešte môžeme pripustiť, aby sme mali zaručené, že vlastne nenastanú nijaké výnimky? Zrejme stačí riešiť celú otázku pre g rovné identicky nule. Cantor dokázal vetu:
„Ak pre všetky $x \in \langle 0, 2\pi\rangle$, s výnimkou nanajvýš konečného počtu bodov $x_1, x_2, \ldots, x_n$, rad

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m \cos mx + b_m \sin mx) \tag{1}$$

konverguje a jeho súčet je rovný 0 , tak pre všetky m je $a_0 = a_m = b_m = 0$.“
Pritom pojem „konečného počtu“ tu chápe ešte celkom intuitívne.
Neskôr si uvedomil, že by za istých okolností mohol pripustiť tiež „nekonečne mnoho“ výnimiek. No vyjasniť „za akých okolností“ si už vyžiadalo úvahy podstatne jemnejšie.
Prvá ťažkosť, ktorú musí Cantor prekonať, je nedostatočne presné vymedzenie pojmu číselnej veličiny, čiže reálneho čísla. Voľne povedané dnešným jazykom, Cantor buduje reálne čísla tak, že každé reálne číslo je určené ako limita nejakej postupnosti racionálnych čísel spĺňajúcej tzv. Bolzanovu-Cauchyho podmienku. Na tento obor potom prirodzeným spôsobom rozšíril aritmetiku a usporiadanie racionálnych čísel. No na takto získaný obor veličín možno opäť aplikovať predchádzajúcu konštrukciu a tvoriť ich postupnosti, postupnosti ich postupností atď., a zadávať nimi stále nové a nové reálne čísla čoraz vyšších rádov. Cantorovi sa podarilo ukázať, že všetky ich možno redukovať na reálne čísla prvého rádu, t. j. na reálne čísla určené postupnosťami čísel racionálnych. Tieto a ďalšie úvahy si vynútili zaviesť pojem množiny reálnych čísel, prípadne trochu všeobecnejšie – bodovej množiny, a učiniť ho predmetom ďalšieho štúdia.
Cantor ďalej zavádza pojem derivácie bodovej množiny A, označenie A' ako množiny všetkých hromadných bodov množiny A (t. j. takých bodov x, v ktorých ľubovoľne malom okolí sa nachádza nejaký bod $a \in A$ rôzny od x), a indukciou definuje

jej n-tú deriváciu

$$A^{(0)} = A, \qquad A^{(n+1)} = (A^{(n)})'.$$

Pôvodnú vetu teraz možno zovšeobecniť takto:

„Ak pre všetky $x \in \langle 0\,,\,2\pi\rangle$, s výnimkou nanajvýš množiny A takej, že $A^{(n)} = \emptyset$ pre nejaké n, rad (1) konverguje a jeho súčet je 0, tak pre každé m je $a_0 = a_m = b_m = 0$."

Postupne Cantora začína stále väčšmi zaujímať štruktúra samotných bodových množín. Uvedomuje si, akým silným nástrojom na jej skúmanie je pojem derivácie množiny, a zavádza tiež derivácie vyšších rádov:

$$A^{(\omega)} = \bigcap_{0<n<\omega} A^{(n)}, \qquad A^{(\omega+1)} = (A^{(\omega)})', \ \ldots,$$

$$A^{(2\omega)} = \bigcap_{0<n<\omega} A^{(\omega+n)}, \ \ldots, \qquad A^{(\omega^2)} = \bigcap_{0<n<\omega} A^{(n\omega)}, \ \ldots, \ \text{atď.}$$

Cantorove výsledky o bodových množinách dosiahnuté pomocou týchto derivácií, podobne ako ich dôsledky pre jednoznačnosť rozkladu funkcií do Fourierových radov, už ponecháme bokom. Tu si všimneme len jednotlivé kroky, v ktorých prebieha iterácia tejto operácie. Spôsob, akým jej jednotlivé kroky za sebou postupne nasledujú, sa totiž stal vzorom pre usporiadanie *ordinálnych čísel* a viedol k vzniku pojmu *dobre usporiadanej množiny*.

Po všetkých (konečných) prirodzených číslach 0, 1, 2, ...,n, $n+1$, ... , nasleduje prvé transfinitné číslo ω, ďalej čísla $\omega+1, \omega+2, \ldots$, za nimi číslo 2ω, za všetkými číslami tvaru $n_1\omega + n_0$, kde n_0, n_1 sú prirodzené čísla, nasleduje číslo ω^2, postupne tak dospievame k číslam $\omega^3, \ldots, \omega^4, \ldots$. Za všetkými číslami tvaru $n_0\omega^k + n_1\omega^{k-1} + \ldots + n_{k-1}\omega + n_k$, kde $k, n_0, n_1, \ldots, n_k$ sú prirodzené čísla, nasleduje číslo ω^ω. Aby sme trochu pokročili, budeme postupovať stále rýchlejšie cez čísla $\omega^\omega, \ldots \omega^{\omega^\omega}, \ldots$ až k číslu obsahujúcemu ω takýchto znakov umocnenia, ktoré označíme $\varepsilon_0 = \omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}}$. A to sme stále ešte len na samom začiatku ordinálneho radu. Ak si vypomôžeme dnešnou terminológiou, môžeme v kvalitatívne novom kroku prebehnúť všetky spočítateľné ordinálne čísla, t. j. také, ktoré majú nanajvýš spočítateľne mnoho predchodcov, a dospieť k prvému nespočítateľnému ordinálu ω_1. Hoci ordinálne čísla, samozrejme, pokračujú i ďalej, tu sa zatiaľ zastavíme, lebo tu sa na čas zastavil i Cantor.

Pripomeňme si, že v klasickom poňatí je obor prirodzených čísel absolútne nekonečný, t. j. vedie až na samý kraj sveta, za všetky pomyselné obzory. Cantor si nielen dovoľuje tento obor aktualizovať, teda vytvoriť množinu všetkých prirodzených čísel, no postulovaním prvého transfinitného čísla ω vystupuje vlastne v tomto poňatí za hranice sveta, niekam do neskutočna, do zásvetia. Navyše si dovoľuje i v tomto zásvetí pokračovať v ceste, ktorá sa ukazuje ubiehať k čoraz vzdialenejším medziam, správajúcim sa do značnej miery podobne ako obzory, a tieto kvalitatívne nové obzory, ktoré sú vlastne hranicami čoraz rozľahlejších nových svetov, dokonca prekračovať. Ba vybuduje i aritmetiku ordinálnych čísel, ktorá rozširuje aritmetiku čísel prirodzených, no v oblasti transfinitného sa od nej výrazne líši, teda dovolí si s týmito transcendentnými objektmi voľne manipulovať.

Uvedomme si nezmyselnosť takéhoto počínania, prinajmenšom z hľadiska klasického výkladu absolútneho nekonečna. Len v abstraktnej podobe čistých ordinálnych čísel by Cantor k takému niečomu sotva našiel odvahu, a asi by mu to ani nenapadlo. Napokon práve voľbou samotného názvu „transfinitný", čo doslovne znamená „zakonečný", a nie „nekonečný", dáva Cantor jasne najavo, že si je istej problematickosti a nesamozrejmosti svojich tranfinitných čísel plne vedomý. Na druhej strane vložením transfinitna medzi konečno a absolútne nekonečno sa toto nekonečno stáva ešte vzdialenejším a „absolútnejším".

Toto a podobné miesta Cantorovej teórie množín sa skutočne stali terčom najrôznejších útokov a Cantorovi sa pri ich obrane dokonca prišlo utiekať pod ochranu popredného teologického filozofa – kardinála Franzelina. Proti téze svojich odporcov pochádzajúcej ešte od Carla Friedricha Gaussa (1777-1855), podľa ktorej nekonečno je len obrat reči, ktorým chceme zachytiť rast nejakej veličiny nad všetky medze, teda nekonečno potenciálne, kým aktuálnemu nekonečnu nemáme právo priznať existenciu, stavia Cantor tézu celkom protichodnú, podľa ktorej len aktuálne nekonečno je nekonečno plnohodnotné a potenciálne nekonečno je len akýsi jazykový zvrat, ktorý, ak má mať vôbec nejaký zmysel, už predpokladá nekonečno aktuálne, až na podklade ktorého sa jeho potencialita môže rozvíjať. Pritom v podstate, len trochu menej teologicky vycibrene, čo však neujde Franzelinovi, zopakuje argumentáciu Bolzanovu.

Cantor totiž tvrdí, že aktualizácia nejakého potenciálne nekonečného oboru objektov, t. j. vytvorenie nekonečnej množiny, je v Božej moci. A čo Boh môže uskutočniť a zmnožuje to jeho slávu, to i uskutočňuje, – vlastne už uskutočnil. Franzelin však namieta, že Boh je nielen všemohúci, no taktiež absolútne slobodný. Niet teda pochýb, že nekonečnú množinu *môže* uskutočniť. Nevieme však, či ju uskutočniť *chce*.

Až teraz môžeme plne doceniť dôvtipnosť Bolzanovho postupu, ktorý objekty spadajúce do svojej nekonečnej množiny

nevolil ľubovoľne, ale zvolil za ne nejaké pravdy osebe. Za existenciu jeho nekonečnej množiny teda nepreberá záruku Božia všemohúcnosť, ktorej potencia sa napĺňa až zo slobodnej Božej vôle, ale ničím (okrem zákona sporu) nepodmienená Božia vševedúcnosť. Čitateľovi ponechávame rozhodnutie, či túto teologickú argumentáciu prijme ako presvedčivý dôkaz existencie nekonečnej množiny, alebo sa na nej pobaví a prejde ju so zhovievavým úsmevom, či, prípadne, definitívne zatratí rozumársku teológiu ako prejav hriešnej pýchy ľudského rozumu, pokúšajúceho sa domýšľavo diktovať samému Bohu.

Cantora však k ordinálnym číslam priviedol, takrečeno proti jeho vôli, konkrétny model založený na iterácii operácie derivácie množiny. V takejto súvislosti sa vytvorenie množiny $A^{(\omega)} = \bigcap_{0<n<\omega} A^{(n)}$, v kroku bezprostredne nasledujúcom za všetkými množinami $A^{(n)}$, zdá niečím celkom prirodzeným. Charakteristická črta obzoru, pozostávajúca práve v možnosti jeho oddialenia, sa tak do matematiky skúmajúcej absolútne nekonečno, vracia takpovediac zadnými dverami. No na druhej strane napríklad ω-ty krok sa svojou podobou od všetkých predošlých krokov výrazne odlišuje, vlastne pri ňom nederivujeme, ale len bilancujeme vykonané kroky, takže bezprostredné začlenenie takzvaných limitných ordinálnych čísel (t. j. takých, ktoré nemajú bezprostredného predchodcu) $\omega,\ 2\omega,\ \dots, \omega^2, \dots,\ \omega^\omega,\ \dots$ $\dots,\ \varepsilon_0,\ \ \dots$ do jedného radu s číslami prirodzenými tým ešte nemožno považovať za celkom oprávnené. Ak by sme napríklad číslo ω chápali ako prvé prirodzené číslo ležiace za obzorom, tak svet za obzorom by sa nám tým zobrazil ako oddelený od sveta pred obzorom akousi prázdnou medzerou, čo nášmu porozumeniu pre obzor značne protirečí. Teda prekročenie obzoru sprostredkované ordinálnymi číslami nie je plynulé, lež útržkovité.

Ďalšou otázkou, ktorú si Cantor kladie, je otázka vzťahu veľkostí rôznych všeobecných množín a bodových množín zvlášť. Definuje vzťah ekvivalencie alebo rovnakej mohutnosti množín. Abstrakciou zavádza *mohutnosť* alebo *kardinálne číslo* množiny ako to, čo majú spoločné všetky množiny, ktoré možno na danú množinu vzájomne jednoznačne zobraziť, teda množiny s ňou ekvivalentné. Množiny ekvivalentné s množinou všetkých prirodzených čísel nazve *spočítateľnými*.

Prvá zaujímavá aplikácia sa dostavuje vzápätí. Cantor dokázal, že množina všetkých prirodzených čísel a množina všetkých reálnych čísel nie sú ekvivalentné. Na druhej strane ukázal, že množina všetkých algebraických čísel (t. j. čísel, ktoré sú riešeniami rovníc tvaru $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, kde $a_1, \ldots, a_n$ sú racionálne čísla) je spočítateľná. Tým Cantor podal čiste existenčný dôkaz existencie transcendentných (t. j. nealgebraických) reálnych čísel bez toho, že by čo i jediné také číslo našiel. ľahko si možno predstaviť, ako takýto dôkaz mohol popudiť Leopolda Kroneckera, ktorý s ironickou poznámkou: „načo nám je váš prekrásny dôkaz, keď iracionálne čísla aj tak nejestvujú," uvítal dokonca i neskorší dôkaz transcendentnosti čísla π, ktorý r. 1882 podal Weierstrassov žiak Ferdinand Lindemann.

Posledný prekvapivý Cantorov výsledok, ktorý tu uvedieme, má históriu dnes už opradenú legendami. Týka sa vzťahu medzi mohutnosťami kontinuí rôznych dimenzií, ktorých rozdielnosť sa Cantor pokúšal postihnúť pomocou pojmu mohutnosti množiny. Najprv sa pokúšal dokázať, že úsečka, teda jednorozmerné kontinuum, nie je ekvivalentná so štvorcom nad touto úsečkou, teda s dvojrozmerným kontinuom. Zrejme pri vhodnej voľbe súradnicovej sústavy možno tieto útvary previesť na interval $\langle 0\,,\,1\rangle$, prípadne jeho kartézsku mocninu $\langle 0\,,\,1\rangle \times \langle 0\,,\,1\rangle$. Hoci sa zdráhal tomu uveriť, Cantorovi vychádzalo, že tieto množiny sú ekvivalentné. Postupne ukázal, že nielen kontinuum ľubovoľne veľkej konečnej dimenzie, no i kontinuum spočítateľnej dimenzie, t. j. napr. množina všetkých postupností čísel z nejakého intervalu a tento interval, majú rovnakú mohutnosť. Z toho vyplýva, že prvky rovnako mohutných množín možno vzájomne pospájať natoľko odlišnými spôsobmi, že dostaneme trebárs kontinuá rôznych dimenzií. Ak teda chceme vyjasniť jav dimenzie, musíme vziať do úvahy i štruktúru tohto spojenia a pri porovnávaní takto štruktúrovaných množín sa obmedziť len na zobrazenia zachovávajúce túto štruktúru. Tým dala teória množín silný podnet k rozvoju topológie a v jej rámci tiež teórie dimenzie. Na druhej strane sa sama stala bázou, na ktorej sa topológia mohla začať rozvíjať.

Neskôr Cantor vybudoval aj aritmetiku kardinálnych čísel. I tá rozširuje aritmetiku prirodzených čísel, no podstatne sa líši od aritmetiky čísel ordinálnych. Navyše sa ukázalo, že dvom rovnako mohutným dobre usporiadaným množinám môžu prislúchať rozličné ordinálne čísla. Dokonca „počet podstatne odlišných spôsobov," koľkými možno dobre usporiadať nejakú danú nekonečnú množinu X, (pokiaľ nie je nulový) je rovný kardinálnemu číslu bezprostredne nasledujúcemu za kardinálnym číslom množiny X. Takto Cantor postupne dospieva ku škále nekonečných kardinálnych čísel

$$\aleph_0,\ \aleph_1,\ \ldots,\aleph_\omega,\ \aleph_{\omega+1},\ldots,\aleph_{\omega_1},\ \ldots,$$

($\aleph$, čítaj „alef", je prvý znak hebrejskej abecedy), ktoré indexuje ordinálnymi číslami. Pritom predpokladá, že tento rad vyčerpáva všetky nekonečné kardinálne čísla, čo je tvrdenie ekvivalentné s *axiómou výberu*, ktorú Cantor implicitne voľne používa bez toho, že by si to vôbec uvedomoval.

Najmenšie nekonečné kardinálne číslo $\aleph_0$ prislúcha množine $\mathbb{N}$ všetkých prirodzených čísel. ďalej Cantor dokázal jednak, že mohutnosť množiny všetkých reálnych čísel je rovná $2^{\aleph_0}$, teda mohutnosti množiny $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ všetkých podmnožín množiny N, jednak, že pre každé kardinálne číslo κ je $\kappa < 2^{\kappa}$. Okamžite sa tak natíska otázka, aká je mohutnosť kontinua, t. j. ktorému v rade alefov sa rovná mohutnosť $2^{\aleph_0}$. Všetky nekonečné množiny reálnych čísel, s ktorými sa Cantor stretol, mali mohutnosť $\aleph_0$ alebo $2^{\aleph_0}$. Pokúšal sa teda dlho bezvýsledne dokázať, že medzi $\aleph_0$ a $2^{\aleph_0}$ už neleží nijaké kardinálne číslo, teda platí $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Táto rovnosť vstúpila do matematiky pod názvom *hypotéza kontinua* a bola zaradená na prvom mieste v chýrnom zozname problémov, ktoré David Hilbert predložil matematickej verejnosti na II. Medzinárodnom matematickom kongrese konanom v r. 1900 v Paríži. Hilbert si pritom uvedomoval podstatne jemnejší charakter problému a požadoval tiež vyjasniť otázku či vôbec možno množinu reálnych čísel dobre usporiadať, teda, či jej mohutnosť sa vôbec nachádza medzi Cantorovými alefmi. Prvý výrazný pokrok v tomto smere dosiahol K. Gödel r. 1938, keď sa mu podarilo dokázať, že axiómu výberu (teda ani dobrú usporiadateľnosť množiny reálnych čísel), ani hypotézu kontinua nemožno vyvrátiť vychádzajúc zo základných axióm teórie množín. Celý problém bol definitívne vyriešený až v r. 1963 Paulom Cohenom, ktorý predviedol, že ani jedno z oboch uvedených tvrdení nemožno v rámci axiomatickej teórie množín dokázať. Axioma výberu a hypotéza kontinua sú teda tvrdenia na základných axiómach teórie množín *nezávislé*. Pritom hypotéza kontinua zostane nezávislou, aj keď k základným axiómam pridáme axiomu výberu.

Čitateľ, ktorý pozorne sledoval naše úvahy od začiatku až sem, je už určite vyškolený natoľko, že bude i sám schopný nájsť presvedčivé teologické argumenty tak v prospech hypotézy kontinua, ako aj jej negácie. Návod nájde v predposlednom odstavci predchádzajúcej kapitoly. Preto si tento bod diskusie dovolíme vynechať. Upozorníme len na tú skutočnosť, že práve hypotéza kontinua je najznámejším tvrdením o univerze množín, o ktorého pravdivosti nielenže nemožno rozhodnúť na základe prijatých axióm, ale pri pokusoch riešiť túto otázku zlyhávajú i teologické motivácie.

Okrem rôznych útokov zo strany odporcov si Cantorova teória množín vyslúžila i uznanie a obdiv značnej časti vedúcich osobností matematiky tých čias. Postupne na jej pôde začal kryštalizovať zámer, ktorý Cantor začal rozvíjať až vo svojej poslednej práci z rokov 1895-97, vybudovať teóriu množín nielen ako jednu z matematických teórií, ale ako základ celej matematiky, schopný jej poskytnúť nielen univerzálny jazyk, ale aj priestor na sprítomnenie všetkých dovtedy študovaných matematických objektov a splniť i tie najprísnejšie nároky na presnosť. Na vznik tohto názoru na teóriu množín mal značný vplyv Cantorov priateľ Richard Dedekind, ktorý ako prvý vystúpil s programom „aritmetizácie matematiky", čím sa, zjednodušene povedané, rozumelo, že „v matematike (presnejšie v analýze) by mali zostať len reálne čísla, množiny reálnych čísel a reálne funkcie". Dnes by sme povedali, že išlo o program výstavby analýzy ako reálnej aritmetiky druhého rádu.

6. Paradoxy teórie množín a niektoré klasické paradoxy

Úspešný rozvoj teórie množín bol prerušený na prelome 19. a 20. storočia, keď vysvitlo, že názorné predstavy, na ktorých táto teória spočíva, vedú k sporom. Tieto spory sa síce objavili až na samých okrajoch teórie množín, takže matematiku na nej založenú, aspoň zatiaľ, bezprostredne neohrozovali, a preto mnohí matematici ani nepovažovali za potrebné venovať im nejakú zvláštnu pozornosť. Jednako väčšina vedúcich osobností vtedajšej matematiky si vážnosť hrozby zrútenia teórie množín plne uvedomovala o to väčšmi, že práve v tomto období boli urobené prvé rozhodujúce kroky umožňujúce postaviť najmä aritmetiku a analýzu, a tým i geometriu, na pevný spoločný základ, ktorým mala byť práve teória množín.

V tom čase boli ešte v živej pamäti rôzne ťažkosti a spory, ku ktorým čas od času dochádzalo v analýze v dôsledku používania nekonečne malých veličín. Okrem iného i preto, lebo vtedajšia matematika nebola vstave postaviť tento názorný a heuristicky cenný nástroj na dostatočne pevný a presný logický a teoretický základ, a tým sa proti prípadným sporom vyplývajúcim z jeho používania poistiť, bolo rozhodnuté tieto veličiny z analýzy vylúčiť. Takzvaná $\varepsilon\delta$-analýza, vybudovaná na pojme limity, pôvodný infinitezimálny kalkul do značnej miery úspešne nahradila. A sotva sa jej dostalo náležitého modelu osnovaného na čerstvo vybudovanej množine reálnych čísel, ktorý s toľkým nadšením uvítala väčšina matematikov, objavili sa trhliny v samotných základoch, na ktorých tento model spočíval. Obava, že história sa bude opakovať a nekonečné množiny spôsobia v matematike podobné nepríjemnosti ako predtým nekonečne malé a nekonečne veľké veličiny, nebola celkom neopodstatnená. Nečudo teda, že odstránenie spomínaných sporov z teórie množín sa stalo, takpovediac, úlohou dňa.

Vcelku však možno povedať, že väčšina matematikov vrátane samého Cantora ani na chvíľu nepochybovala, že objavené spory bude možné prekonať na základe hlbšej analýzy pojmu množiny a princípov, podľa ktorých množiny tvoríme. Uvedené spory preto dostali názov *paradoxy*, čím sa dávalo najavo, že si ich netreba vykladať ako zrútenie teórie množín, ale ako svojho druhu detskú chorobu, z ktorej táto teória ďalším vývojom vyrastie.

Vyskytli sa však i opačné názory, ktoré na základe týchto sporov Cantorovu teóriu množín definitívne zavrhovali. Snáď najvýraznejším príkladom nám môže poslúžiť Henri Poincaré, jedna z najvýraznejších postáv matematiky, fyziky a filozofie vedy toho obdobia, ktorý spočiatku patril k nadšeným obdivovateľom teórie množín, no vzápätí sa od nej celkom odvrátil. Nad matematikou sa tak začali sťahovať chmáry najťažších ideových bojov, aké táto veda kedy zažila a ktorým nebolo súdené celkom utíchnuť ani do dnešných čias.

No skôr než pristúpime k výkladu týchto protichodných stanovísk, pozastavíme sa v krátkosti pri niektorých zo spomínaných paradoxov.

Hlavným zdrojom skoro všetkých týchto paradoxov je pôvodný, veľmi názorný, no značne hmlistý vymedzovací princíp, podľa ktorého k ľubovoľnej zmysluplnej vlastnosti $\varphi(x)$ možno vytvoriť množinu $\{x\,;\,\varphi(x)\}$, t. j. množinu práve tých objektov x, pre ktoré platí $\varphi(x)$.

Paradox množiny všetkých ordinálnych čísel. Na základe spomínaného princípu môžeme vytvoriť množinu Ω všetkých ordinálnych čísel. Táto množina je v obvyklom usporiadaní ordinálnych čísel sama dobre usporiadaná, takže jej zodpovedá nejaké ordinálne číslo $\theta \in \Omega$. Na druhej strane však z vlastností dobrého usporiadania, ktoré dokázal Cantor, vyplýva, že pre každé $\alpha \in \Omega$ je $\alpha < \theta$. Teda $\theta < \theta$, čo je spor.

Tento paradox ako prvý publikoval Césare Burali-Forti v r. 1897, no bol známy už Cantorovi v r. 1895, rovnako ako **paradox množinyvšetkých kardinálnych čísel** a**paradox množiny všetkých množín**, ktoré možno priviesť k sporu podobným spôsobom. Tak napríklad nech M je množina všetkých množín a $\mathcal{P}(M)$ je množina všetkých jej podmnožín. Nakoľko prvky množiny $\mathcal{P}(M)$ sú zas len množiny, zrejme $\mathcal{P}(M) \subseteq M$, teda tým skôr $\mathcal{P}(M)$ má mohutnosť menšiu alebo rovnú ako M. Na druhej strane, podľa už spomínanej Cantorovej vety, mohutnosť M je menšia ako mohutnosť $\mathcal{P}(M)$, čo je spor.

Uvedené paradoxy Cantor nechápal ako spory. Vyvodil z nich závery, že také obory objektov ako obor všetkých množín alebo obor všetkých ordinálnych či kardinálnych čísel nie sú aktualizovateľné, to znamená, že si nemožno všetky objekty do nich spadajúce vykladať ako uskutočnené. Teda tieto obory nie sú množinami v pravom slova zmysle. Cantor pre ne použil názov nekonzistentné množiny. V odpovedi na list, v ktorom sa o tom zmieňuje Dedekindovi, mu však tento položil záludnú otázku: Ako vie, že nekonzistentnými množinami sú len také množiny ako množina všetkých množín, množina všetkých kardinálnych čísel množina všetkých ordinálnych čísel a podobne? Čím možno zaručiť, že nekonzistentnými sa neukážu už množiny, ktorým pripisuje kardinálne čísla $\aleph_0, \aleph_1, \dots, \aleph_\omega, \dots$?

Cantor odpovedá, že to zaručiť nevie a také niečo nemožno zaručiť ani pre konečné množiny. Konzistentnosť konečných množín treba chápať ako nedokázateľnú pravdu, to jest „axiómu aritmetiky". Podobne konzistentnosť množín, ktorým ako kardinálne čísla zodpovedajú rôzne alefy, je tak „axiómou zovšeobecnenej transfinitnej aritmetiky".

Tým sa však Cantor usvedčuje zo značnej bezstarostnosti, s akou pristupuje k aktualizácii čoraz obsiahlejších nekonečných oborov objektov. Jediným vodidlom je mu pri tom snaha rozšíriť aritmetiku konečných prirodzených čísel do trasfinitnej kardinálnej prípadne ordinálnej aritmetiky. Jeho prístup je tak vo svojej podstate pytagorejský. Na jednej strane sa tým síce, najmä v dôsledku zavedenia umocňovania kardinálnych čísel, otvárajú matematike dovtedy netušené, nové obzory, podstatne prekračujúce rámec priestoru prirodzeného názoru, ktorý neopustil Bolzano; na druhej strane však nad týmto novootvoreným svetom visí hrozba jeho zrútenia.

Jednako uvedené paradoxy naznačujú, že ani aktualizáciou stále obsiahlejších oborov objektov sa teória množín potenciality nezbaví. V neaktualizovateľnom obore všetkých aktuálne nekonečných množín sa pred ňou totiž otvára akési potenciálne supernekonečno.

Podobného druhu je a podobné závery možno tiež vyvodiť z nasledujúceho paradoxu objaveného Bertrandom Russellom v r. 1902. Pre svoju značnú priehľadnosť a jednoduchosť použitých pojmov však práve tento paradox najväčšmi otriasol dôverou v princípy Cantorovej teórie množín a v najväčšej miere je zodpovedný za vypuknuvšiu krízu.

Russellov paradox. Uvažujme množinu R všetkých množín, ktoré nie sú prvkami samej seba. Zjednodušene môžeme písať $R = \{x\,;\, x \notin x\}$. Ľahko nahliadneme, že z ľubovoľného z dvoch navzájom si odporujúcich predpokladov $R \in R$, $R \notin R$ vyplýva druhý, čo je spor.

Pojem množiny nie je v Russellovom paradoxe podstatný. Je tu použitý len na zvýraznenie zámeru vykladať si nejakú vlastnosť objektov ako množinu všetkých objektov, ktoré túto vlastnosť majú, teda ako jediný objekt. V tomto zmysle teda Russellov paradox odhaľuje medze už spomínaného objektivizačného zámeru teórie množín: Všetky sprievodné javy ukazujúce sa na objektoch si nemožno bezosporne vyložiť ako objekty.

Sám Russell vymyslel rad populárnych príkladov na ilustráciu svojho paradoxu. Z nich asi najvydarenejší je **paradox vojenského holiča**. Vojenského holiča definujú vojenské predpisy ako takého vojaka príslušnej jednotky, ktorý holí všetkých vojakov jednotky, ktorí sa sami neholia. Náš vojenský

holič stojí teraz pred dilemou: Ak sa oholí, je vojakom, ktorý sa sám holí, a takého vojenský holič nemá čo holiť; ak sa neoholí, je vojakom, ktorý sa sám neholí, a takého vojaka musí ako vojenský holič oholiť. Nuž, nezávideniahodná situácia.

Ďalšie dva paradoxy však poukazujú na to, že v už spomínanom vymedzovacom princípe sa nezaobídeme ani bez hlbšieho vyjasnenia pojmu „zmysluplná vlastnosť”, lebo ani v matematike, hoc by sme sa aj vzdali spomínaného objektivizačného zámeru v plnom rozsahu, si nemôžeme dovoliť študovať vôbec všetky „zmysluplné” vlastnosti.

Richardov paradox je akousi paródiou na Cantorovu diagonálnu metódu. Uvažujme množinu D všetkých podmnožín množiny prirodzených čísel, ktoré možno definovať pomocou nejakého výrazu v slovenskom jazyku. Keďže každý výraz slovenského jazyka pozostáva len z konečného počtu výskytov znakov abecedy, ktorých je tiež len konečne mnoho, množina D je zrejme spočítateľná. Možno ju teda zoradiť do postupnosti $X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$. Potom slovenský výraz „množina všetkých prirodzených čísel, ktoré nie sú prvkami množiny nachádzajúcej sa na mieste prislúchajúcom tomuto číslu v práve opísanej postupnosti” definuje množinu $Y = \{n \in \mathbb{N}\,;\, n \notin X_n\}$. Zrejme $Y \in D$, no pre každé n je $Y \neq X_n$, čo je spor.

Berryho paradox. Uvažujme množinu A všetkých prirodzených čísel, ktoré možno definovať pomocou nejakého výrazu slovenského jazyka pozostávajúceho z menej než dvadsiatich slov. Pretože slovenčina má len konečnú slovnú zásobu, i množina A je nevyhnutne konečná. Preto existuje prirodzené číslo $n \notin A$. Potom však slovenský výraz „najmenšie prirodzené číslo, ktoré nemožno definovať nijakým výrazom slovenského jazyka pozostávajúcim z menej než dvadsiatich slov” definuje najmenšie prirodzené číslo m, ktoré nie je prvkom množiny A. Zrejme však m je definované pomocou slovenského výrazu pozostávajúceho zo šestnástich slov, teda $m \in A$, čo je spor.

Kým prvé tri z uvedených paradoxov sa bezprostredne týkajú iba Cantorovej teórie množín, keďže využívajú jej špecifické pojmy, ďalšie tri už bezprostredne zasahujú celú matematiku a logiku, ba dokonca prerastajú ich rámec a upozorňujú nás na medze bezprostredného pojmového uchopenia sveta v jazyku. Pre úplnosť uvedieme ešte dva jazykové paradoxy s podobnými dôsledkami, ktoré však už vôbec nespočívajú na matematických pojmoch.

Grellingov paradox javí istú príbuznosť s Russellovým paradoxom. Prídavné meno nazveme *autologickým,* ak samo má vlastnosť, ktorú označuje. V opačnom prípade ho nazveme *heterologickým*. Zrejme prídavné meno „slovenský” je autologické, lebo je slovenské. Podobne „krátky” je krátke, teda autologické prídavné meno. Na druhej strane „dlhý” nie je dlhé a „zelený” nie je zelené, teda sú to príklady heterologických prídavných mien. Podobne prídavné meno „anglický” nie je anglické, lež slovenské, teda heterologické. Zrejme i samo prídavné meno „autologický” je autologické.No ak sa pokúsime odpovedať na otázku, aké je prídavné meno „heterologický”, zistíme, že je autologické práve vtedy, keď je heterologické, čo je spor.

Epimenidov paradox. V tomto klasickom paradoxe, známom už od čias antiky, Kréťan Epimenides prednesie výrok: „Všetci Kréťania sú klamári”. (Pritom sa mlčky predpokladá, že klamári stále klamú.) Ak je toto tvrdenie pravdivé, tak i Kréťan Epimenides klame, teda je nepravdivé. Zostáva teda už len druhá možnosť, že uvedené tvrdenie je nepravdivé; potom síce Epimenides klame (alebo sa mýli), no aspoň jeden Kréťan klamárom nie je. To ešte samo osebe nie je logický spor, ale skutočnosť, že prednesenie jedinej nepravdivej vety nám môže zaručiť existenciu nejakého pravdovravného človeka, nie je o nič menej paradoxná. Rovnako známy príbuzný paradox, tentoraz v podobe logického sporu, je ukrytý napríklad vo vete: „Táto veta je nepravdivá”.

Z antických paradoxov má k teórii množín vzťah **paradox hromady**, niekedy uvádzaný v inej formulácii ako **paradox holohlavého**. Jedno zrnko piesku netvorí hromadu. Ak pridáme k zrnkám piesku, ktoré netvoria hromadu jedno zrnko, stále ešte nedostaneme hromadu. Podľa princípu matematickej indukcie potom nijaký počet zrniek piesku nemôže tvoriť hromadu. Na druhej strane 10^{15} zrniek piesku už tvorí celkom slušnú hromadu.

Ak chceme zachrániť princíp indukcie, tak z tohto paradoxu sa matematike ponúka jediné, nie príliš dôstojné východisko. Musí uznať, že niektoré „neostré” či „rozmazané” obory prirodzených čísel nie sú predmetom jej štúdia. Túto medzeru do istej miery zapĺňa tzv. *teória fuzzy množín,* vytvorená L. A. Zadehom.

Náš zoznam klasických paradoxov by nebol úplný, keby v ňom chýbali slávne Zenónove apórie. I keď sa teórie množín priamo netýkajú, sú práve ony prvými známymi paradoxmi, ktoré sa objavujú pri úvahách o nekonečne. A v niektorých sporoch okolo infinitezimálneho počtu nekonečne malých možno pri troche pozornosti začuť ich dozvuky. Navyše svojím nástojčivým poukazom na spornosť pojmového uchopenia pohybu predstavujú permanentnú výzvu v antickom duchu zrodenej vede – matematike, fyzike a filozofii zvlášť –, ktorá ani časom nestratila na aktuálnosti.

Dichotómia. Nejestvuje žiaden pohyb, lebo lebo to, čo sa pohybuje, musí najprv dospieť do polovice cesty, skôr než dospeje do konca. Ale aby to dospelo do polovice cesty, musí to dospieť najprv do polovice tejto polovice atď. Takže pohyb sa ani nemôže začať.

Achilles a korytnačka. Achilles, najrýchlejší z ľudí, nemôže dobehnúť korytnačku, najpomalšiu z tvorov, ak sa vydala na cestu pred ním. Najprv by totiž prenasledovateľ musel dospieť do miesta, odkiaľ unikajúci vyrazil, potom do miesta, kde bol unikajúci v okamihu, keď prenasledovateľ dospel do východiskového bodu atď. Takže pomalá korytnačka bude pred rýchlonohým Achillom vždy o určitý úsek vpredu.

Letiaci šíp. Pripusťme, že všetko v každom okamihu sa nachádza na svojom mieste aje buď v pokoji alebo v pohybe. Ak sa letiaci šíp nachádza v každom okamihu na svojom mieste, tak je v každom jednotlivom okamihu nehybný, teda sa nemôže pohybovať. Ak by sa totiž v nejakom okamihu pohyboval, nebol by v tomto okamihu na svojom mieste, teda nebol by vlastne nikde.

Štadión. Nech sa dva rady, pozostávajúce z rovnakého počtu rovnako veľkých telies, pohybujú po pretekárskej dráhe štadióna oproti sebe rovnakými rýchlosťami. Ak pripustíme, že pohyb sa odohráva zmenami polohy o rovnaké malé, ďalej už nedeliteľné dĺžkové jednotky v rovnako krátkych, ďalej už nedeliteľných okamihoch, tak v okamihu, za ktorý sa posunie prvý rad voči štadiónu o jednotku druhý rad sa tiež posunie voči štadiónu o jednotku, lenže v opačnom smere. Jeden rad sa tak vzhľadom na druhý posunie za ten istý čas o dve jednotky. Teda dve dĺžkové jednotky sa rovnajú jednej jednotke, t. j. dva časové okamihy sa rovnajú jednému okamihu.

Všimnime si, že v prvých dvoch apóriách vyvodzuje Zenón spor z predpokladu o neohraničenej deliteľnosti priestoru a času, kým v druhých dvoch dospieva k sporu za opačného predpokladu, že priestor a čas sa skladajú z nedeliteľných častí. Kým prvá a tretia apória ukazujú nemožnosť absolútneho pohybu, druhá a štvrtá vyvracajú možnosť pohybu relatívneho.

Objavenie sa sporov v teórii množín postavilo pred matematiku tých čias úlohu omnoho rozsiahlejšiu a podstatne náročnejšiu, akou by bola len púha lokalizácia akýchsi „chýb” či „neprípustných úvah” v uvedených paradoxoch a vytvorenie pravidiel, dodržiavanie ktorých by zabránilo upadnutiu do týchto a podobných sporov. Ak sa totiž spory už raz v matematike vyskytli – a dotej doby sa vyskytli neraz – nedalo sa vylúčiť, že sa v nej i po ich odstránení časom vyskytnú nejaké nové. Aby sa teda zabránilo periodickému opakovaniu kríz v matematike, bolo nevyhnutné nielen kriticky prehodnotiť základné princípy teórie množín, ale aj matematickej logiky a vôbec rozpracovať hlbší výklad samotnej povahy matematického myslenia a poznania, a postaviť tak matematiku na základy, o ktorých pevnosti by už nebolo možné pochybovať. Inak povedané, bolo treba nielen odstrániť a prekonať dovtedy známe spory, ale hlavne zabezpečiť, že v matematike postavenej na týchto nových základoch sa už žiadne spory nemôžu vyskytnúť. Aby sme si však mohli byť niečím takým istí, musíme bezospornosť základov matematiky *dokázať*.

Z toho dôvodu sa tu rôznymi pokusmi zameranými len na bezprostredné prekonanie paradoxov teórie množín ani nebudeme zaoberať. Bližšie si všimneme len tri najvýznamnejšie smery v rozpracovaní základov matematiky, ktoré napokon i tieto bezprostredné pokusy v sebe zahŕňajú: logicizmus, intuicionizmus a formalizmus. Najprv sa však zastavíme pri prvom (a dodnes najrozšírenejšom) axiomatickom systéme teórie množín, ktorý leží niekde na polceste medzi spomínanými dvoma druhmi navrhovaných východísk.

7. Axiomatická teória množín

Prvý axiomatický systém teórie množín navrhol v r. 1908 Ernst Zermelo (1871-1953). Jeho systém pozostával zo šiestich samostatných axióm a jednej schémy zahrnujúcej nekonečne mnoho axióm:

Axióma extenzionality

$$X = Y \iff (\forall x)(x \in X \iff x \in Y)$$

(Množiny X, Y sú si rovné práve vtedy, keď majú tie isté prvky.)

Axióma dvojice

$$(\forall x, y)(\exists Z)(\forall z)(z \in Z \iff z = x \lor z = y)$$

(K ľubovoľným dvom prvkom x, y existuje množina $\{x, y\}$.)

Axióma zjednotenia

$$(\forall X)(\exists Y)(\forall y)(y \in Y \iff (\exists x \in X)(y \in x))$$

(K ľubovoľnej množine X existuje množina $\bigcup X$, t. j. zjednotenie všetkých množín, ktoré sú prvkami množiny X.)

Axióma potencie

$$(\forall X)(\exists Y)(\forall Z)(Z \in Y \;\Leftrightarrow\; Z \subseteq X)$$

(K ľubovoľnej množine X existuje množina $\mathcal{P}(X)$ všetkých podmnožín množiny X.)

Axióma nekonečna

$$(\exists X)(\emptyset \in X \;\&\; (\forall x \in X)(x \,\cup\, \{x\} \in X))$$

(Existuje aspoň jedna nekonečná množina.)

Schéma axióm vydelenia

Ak $\varphi(x)$ je formula jazyka teórie množín, tak nasledujúca formula je axióma

$$(\forall X)(\exists Y)(\forall x)(x \in Y \;\Leftrightarrow\; x \in X \;\&\; \varphi(x))$$

(Ak $\varphi(x)$ je množinová vlastnosť, tak ku každej množine X existuje množina $\{x \in X \;;\; \varphi(x)\}$, t. j. množina všetkých prvkov x množiny X, pre ktoré platí $\varphi(x)$.)

Axióma výberu

$$(\forall X)[(\forall A, B \in X)(A \cap B \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; A = B) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; (\exists Z)(\forall A \in X)(\exists !\, a)(a \in A \cap Z)]$$

(Ak X je množina neprázdnych po dvoch disjunktných množín, tak existuje množina Z, nazývaná selektor na X, ktorá z každej množiny $A \in X$ obsahuje práve po jednom prvku.)

Neskôr Ernst Zermelo pridal ešte jednu axiómu a Abraham Fraenkel ďalšiu schému axióm:

Axióma regularity

$$(\forall X)(X \neq \emptyset \;\Rightarrow\; (\exists A \in X)(A \cap X = \emptyset))$$

(Každá neprázdna množina obsahuje ako prvok množinu s ňou disjunktnú.)

Schéma axióm obrazu

Ak $\psi(x, y)$ je formula jazyka teórie množín, tak nasledujúca formula je axióma

$$(\forall x, y, z)(\psi(x, y) \;\&\; \psi(x, z) \;\Rightarrow\; y = z) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; (\forall X)(\exists Y)(\forall y)(y \in Y \;\Leftrightarrow\; (\exists x \in X)\psi(x, y))$$

(Ak $\psi(x, y)$ je množinový vzťah, ktorý k danému x jednoznačne určuje prípadné y také, že $\psi(x, y)$, tak k ľubovoľnej množine X existuje množina $\{y \;;\; (\exists x \in X)\psi(x, y)\}$ všetkých tých y, ktoré v tomto vzťahu prislúchajú k nejakému prvku množiny X.)

Axióma extenzionality zachytáva už spomínanú skutočnosť, že prvky sa na množine podieľajú len púhou svojou prítomnosťou.

Axiómy dvojice, zjednotenia a najmä potencie umožňujú vytvárať z daných množín stále obsiahlejšie nové množiny.

Axióma nekonečna postuluje existenciu množiny pozostávajúcej z nekonečne mnohých prvkov, a tým umožňuje začať napĺňať vedúci zámer teórie množín študovať jav nekonečna v aktuálnej podobe. Táto axióma tiež umožňuje vybudovať kanonický množinový model prirodzených čísel.

Schéma axióm vydelenia upresňuje, a hlavne výrazne obmedzuje už spomínaný Cantorov vymedzovací princíp tak, že nové množiny dovoľuje vydeľovať jednak len ako časti množín už vytvorených, jednak len pomocou vlastností, ktoré možno vyjadriť v jazyku teórie množín. Zermelo tak rozvinul jednu Cantorovu poznámku, podľa ktorej v rôznych odvetviach matematiky (snáď jedine s výnimkou samotnej teórie množín) možno pri väčšine úvah vopred zadať nejakú základnú množinu takú, že všetky naše úvahy sa potom týkajú len jej prvkov. Obmedzenie „zmysluplných” vlastností len na vlastnosti vyjadrené

„zmysluplných“ vlastností len na vlastnosti vyjadrené formalizovaným jazykom teórie množín, ktoré v uvedenej redakcii pochádza od T. Skolema a A. Fraenkela, opiera svoje opodstatnenie o vieru vo vedúci zámer teórie množín stať sa svetom celej matematiky. Ak je tento zámer oprávnený, tak týmto obmedzením nič podstatného nemôžeme stratiť.

Axióma regularity je skôr globálnou charakteristikou množinového univerza než zachytením nejakej intuitívne zrejmej vlastnosti množín a pri väčšine úvah v matematike opierajúcej sa o teóriu množín sa bez nej pokojne zaobídeme. Jej úlohou je zachytiť postupné tvorenie univerza množín iteráciou operácie potenčnej množiny v dobre usporiadaných krokoch, vychádzajúc z prázdnej množiny podľa nasledujúcej schémy:

Transfinitnou indukciou definujeme systém množín V_α, indexovaný cez všetky ordinálne čísla α, taký, že

$$V_0 = \emptyset$$

$$V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha) \qquad \text{každý ordinál } \alpha, \text{ a}$$

$$V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha \qquad \text{pre každý limitný ordinál } \lambda.$$

Axióma regularity je potom ekvivalentná s tvrdením, že každá množina je prvkom niektorej z množín V_α, teda vlastne zachytáva „stvorenie univerza množín z ničoho“. Taktiež nám umožňuje zaviesť tzv. typovú funkciu. Typ množiny X, označenie $\tau(X)$, definujeme ako najmenšie ordinálne číslo a také, že $X \subseteq V_\alpha$, t. j. $X \in V_{\alpha+1}$. Zrejme $\tau(\emptyset) = 0$, pre konečné množiny máme

$$\tau(\{x_1, \ldots, x_n\}) = \max_{\{1\leq i\leq n\}} \tau(x_i) + 1 \qquad \text{a}$$

$$x \in y \Rightarrow \tau(x) < \tau(y)$$

pre ľubovoľné x, y. Teda $\tau(X) = \alpha$ znamená, že v „deň α boli už stvorené všetky prvky množiny X”. v „nasledujúci deň $\alpha + 1$” už môžeme vytvoriť i množinu X ako samostatný objekt.

Schéma axióm obrazu rozširuje pôvodnú schému vydelenia. Podľa nej môžeme nové množiny tvoriť nielen z už vytvorených množín vydeľovaním častí definovateľných množinovými formulami, ale aj množinovo definovateľným „premietaním” takýchto častí. Navyše táto axióma zaručuje, že práve opísaná tvorba množín α sa nezastaví už pri kroku prislúchajúcom ordinálnemu číslu $\alpha = 2\omega$ ani nijakému ďalšiemu ordinálu.

Ľahko možno nahliadnuť, že tak Zermelov, ako i Zermelov-Fraenkelov axiomatický systém umožňuje vyhnúť sa skôr uvedeným paradoxom. Dôkaz sporu v príslušnom paradoxe sa zakaždým zvráti v záver, že obor objektov, ktorý tam vystupuje, jednoducho nie je množinou. Tak napríklad z Russellovho paradoxu vyplýva, že všetky množiny netvoria množinu; z Berryho paradoxu zase plynie, že ani všetky prirodzené čísla, ktoré možno definovať slovenským výrazom pozostávajúcim z menej než dvadsiatich slov, netvoria množinu, v dôsledku čoho, ako aj princípu matematickej indukcie túto vlastnosť prirodzených čísel nemožno zachytiť v jazyku teórie množín.

Otvorenou však zostáva otázka, či sa v axiomatickej teórii množín nemôžu vyskytnúť nejaké iné spory. Zermelo hneď na samom začiatku poznamenáva, že hoci v jeho teórii sa nemôže vyskytnúť žiaden zo známych sporov, jej celkovú bezospornosť sa mu napriek tomu dokázať nepodarilo. Že to nemožno pripísať na vrub náhode ani nedostatku Zermelových schopností, dokázal Kurt Gödel r. 1930.

Samostatnú pozornosť si zaslúži axióma výberu, ktorá k danej množine X postuluje selektor Z bez toho, že by – na rozdiel od ostatných axióm – popisovala, ako ho možno vytvoriť a aké prvky ho tvoria. Túto axiómu ako prvý vedome použil Giuseppe Peano (1858 -1932) v jednej práci z teórie diferenciálnych rovníc, kde o nej zároveň vyslovil aj isté pochybnosti. Zermelo pomocou axiómy výberu dokázal, že každú množinu možno dobre usporiadať, čím legalizoval Cantorovu otázku, ktorému z alefov sa rovná mohutnosť množiny všetkých reálnych čísel.

Axiómu výberu možno pre konečné množiny jednoducho dokázať indukciou. z toho dôvodu sme náchylní prijať ju i pre množiny nekonečné. Musíme si však uvedomiť, že tým na nekonečné opäť prenášame jeden z atribútov konečného, teda znovu sa na absolútne nekonečno dívame „Božími očami". Prijatie axiómy výberu je tak už predpojaté v teologickom poňatí teórie množín, ktoré pretrváva v podvedomí matematikov. Vytvoriť príslušný nekonečný selektor nemôže totiž Bohu spôsobiť o nič väčšie ťažkosti, než vytvoriť konečný selektor nám. Axióma výberu sa tak po aktuálnom nekonečne stala ďalším jablkom sváru a jej objavenie ešte vyostrilo rozdelenie matematikov na rôzne tábory.

Z toho dôvodu sa axióma výberu ani dnes nepovažuje za jednu zo základných axióm Zermelovho-Fraenkelovho systému, a hoci sa bežne používa, býva dobrým zvykom zvlášť vyznačovať tvrdenia dokázané s jej pomocou. Táto tendencia je zrejmá aj z používaného skráteného označenia: Zermelo-Fraenkelov axiomatický systém má skratku ZF, kým Zermelo-Fraenkelov systém s axiómou výberu sa zvykne značiť ZFC.

Ďalším dôvodom – okrem teologických motivácií – vďaka ktorému sa axióma výberu v matematike predsa len presadila, je skutočnosť, že v nej matematici dostali do rúk nový, mimoriadne silný dôkazový prostriedok, umožňujúci radikálnym spôsobom riešiť rad dovtedy otvorených problémov. Máme na mysli najmä takzvané neefektívne existenčné dôkazy, pomocou ktorých môžeme často zaručiť existenciu nejakého objektu požadovaných vlastností bez toho, že by sme si čo i len v princípe vedeli predstaviť, ako by mohla vyzerať metóda, ktorou by sme taký objekt mali hľadať. Na druhej strane však táto axióma má i nemálo značne nepríjemných a intuícii protirečiacich dôsledkov. Za všetky spomeňme len slávny paradox Banacha-Tarského, ktorí dokázali, že guľu o veľkosti povedzme špendlíkovej hlavičky možno rozložiť na konečný počet bodových množín (samozrejme nemerateľných), z ktorých, keď ich vhodne popremiestňujeme, dostaneme guľu trebárs veľkosti Slnka. v tom čase však k axióme výberu nebola známa nijaká *pozitívna* alternatíva, ktorá by ju dokázala nahradiť i v niektorých – jej pre matematiku nepostrádateľných dôsledkoch. A tak matematici, ktorí axiómu výberu prijali, dokazovali nové zaujímavé, aj keď často paradoxné a názorným predstavám odporujúce tvrdenia, kým tí druhí viac-menej držali dobrovoľný pôst. Až to väčšinu z nich omrzelo a vrhli sa doháňať, čo zameškali. Dnes by sa už i hodnotná alternatíva našla, napr. axióma determinovanosti, ktorá, hoci jej konečný variant je tiež dokázateľný, protirečí axióme výberu. Lež tá sa už natoľko vžila, že svojej mladšej konkurentke sotva poskytne príležitosť.

Konečne o posledný dôvod, ktorý odľahčil svedomiu matematikov používajúcich axiómu výberu, sa postaral K. Gödel r. 1938, keď, ako sme už spomínali, dokázal neprotirečivosť axiómy výberu (ako aj hypotézy kontinua) voči ostatným axiómam Zermela-Fraenkela. Vzhľadom na skoršie Gödelove výsledky, o ktorých ešte bude reč, to znamenalo asi toľko: alebo je celá teória množín Zermela-Fraenkela sporná aj bez axiómy výberu, alebo nie je sporná ani s ňou. Teda zrieknutím sa axiómy výberu nemožno nič zachrániť, rovnako ako jej prijatím nemožno nič pokaziť.

Výsledok P. Cohena z r. 1963, podľa ktorého axiómu výberu nemožno ani dokázať z ostatných Zermelových-Fraenkelovych axióm, teda jej negácia je vzhľadom k nim rovnako bezosporná, už nemohol postavenie tejto axiómy vážnejšie ohroziť. Naznačil však, že axióma výberu by mohla v teórii množín a na nej založenej matematike zohrať do istej miery podobnú úlohu ako Euklidov piaty postulát v geometrii. To znamená, že – rovnako ako neeuklidovské geometrie – sú možné aj iné, necantorovské teórie množín a na nich založené „iné matematiky“. Teda pravdivosť východiskových axióm teórie množín neslobodno chápať ako niečo viac než púhu hypotézu, ktorá sa môže verifikovať či falzifikovať len v istých rozmedziach aplikácií.

Vráťme sa však ešte na chvíľu k axióme determinovanosti, ktorú sme len tak medzi rečou spomenuli bez toho, že by sme vyložili, čo vlastne hovorí. Každá množina A reálnych čísel z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ určuje nekonečnú hru dvoch hráčov, ktorú označíme $G(A)$. Hráči I, II striedavo píšu cifry $a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots$ z množiny $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Ako výsledok dostávame dekadický zápis čísla

$$a = 0, a_0a_1a_2a_3 \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^{n+1}} \in \langle 0, 1\rangle$$

Hráč I vyhráva, ak $a \in A$; inak vyhráva hráč II. Hra $G(A)$ sa nazýva determinovaná, ak v nej má hráč I alebo hráč II vyhrávajúcu stratégiu. **Axióma determinovanosti** tvrdí, že pre

ľubovoľnú množinu $A \subseteq \langle 0, 1\rangle$ je hra $G(A)$ determinovaná (čím podobne ako axióma výberu *postuluje* existenciu príslušnej vyhrávajúcej stratégie bez toho, že by ju *popisovala*).

Na základe axiómy výberu (presnejšie dobrého usporiadania intervalu $\langle 0, 1\rangle$) možno zostrojiť množinu $A \subseteq \langle 0, 1\rangle$ takú, že v hre $G(A)$ nemá ani jeden z hráčov vyhrávajúcu stratégiu. Teda axióma výberu a axióma determinovanosti si protirečia. Na druhej strane rovnako ako v prípade axiómy výberu, konečný variant axiómy deteminovanosti (t. j. determinovanosť hier s konečným počtom ťahov) možno jednoducho dokázať ako dôsledok zákona vylúčenia tretieho a pravidiel pre negovanie kvantifikovaných formúl. Teda k prijatiu jednej i druhej axiómy nás vedie prenášanie atribútov konečného na nekonečné pri jeho aktualizácii.

Na rozdiel od axiómy výberu nás však teologické motivácie k prijatiu axiómy determinovanosti priamo nenútia. Zrejme proti hráčovi, ktorý má v hre $G(A)$ vyhrávajúcu stratégiu a počína si podľa nej, by ani Boh nevyhral. Nedeterminovanosť hry $G(A)$ s i však môžeme vyložiť tak, že v tejto hre by Boh vyhral proti hocako múdremu hráčovi, nech by už bol na ťahu ako prvý alebo druhý. v nekonečnosti hry $G(A)$ je však už mlčky obsiahnutý predpoklad, že i tento protihráč musí byť aspoň svojou nesmrteľnosťou Bohu podobný. Pohanské panteóny nám poskytujú hojnosť takýchto postáv. Judaizmus, kresťanstvo aj islam pripúšťajú, že by to mohol byť padlý anjel či diabol. Takáto dualistická predstava je jednou z ústredných tém staroperzského zoroastrizmu.

Z axiómy determinovanosti vyplýva axióma výberu pre spočítateľné systémy množín reálnych čísel, teda základné výsledky analýzy, vyžadujúce si axiómu výberu, jej neprítomnosťou nijako neutrpia. Ďalším príjemným dôsledkom je lebesguoveská merateľnosť všetkých podmnožín reálnej osi. Navyše axióma determinovanosti svojím spôsobom rieši aj hypotézu kontinua. Keďže množinu reálnych čísel za jej predpokladu nemožno dobre usporiadať, je $\aleph_1 \neq 2^{\aleph_0}$. Na druhej strane každá nekonečná podmnožina množiny reálnych čísel má potom mohutnosť $\aleph_0$ alebo $2^{\aleph_0}$. Kardinálne čísla $\aleph_1$ a $2^{\aleph_0}$ sú teda dve navzájom neporovnateľné mohutnosti, z ktorých každá bezprostredne nasleduje za $\aleph_0$. Usporiadanie kardinálnych čísel tak prestáva byť lineárnym.

Pre úplnosť treba ešte podotknúť, že na rozdiel od axiómy výberu, pre axiómu determinovanosti zatiaľ nie je k dispozícii dôkaz jej bezospornosti s ostatnými axiómami Zermela-Fraenkela. Takže jej odporcovia majú ešte stále aspoň teoretickú „nádej“, že sa dokáže jej negácia. Aká mizivá je táto nádej, vyplýva z nedávnych výsledkov D. A. Martina, J. R. Steela a W. H. Woodina: z bezospornosti teórie ZF s axiómou postulujúcou existenciu istého obrovského kardinálneho čísla už vyplýva bezospornosť teórie ZF s axiómou determinovanosti a tzv. axiómou závislého výberu, čo je dokonca silnejší variant spočítateľnej axiómy výberu, než sme pred chvíľou spomínali.

Na záver, ak máme zhrnúť, môžeme povedať, že Zermelov-Fraenkelov axiomatický systém skutočne umožnil do seba pojať väčšinu vtedajšej matematiky a navyše dal výrazné podnety pre jej ďalší rozvoj. Postupne sa stal najrozšírenejšou teóriou zohrávajúcou úlohu základov matematiky, pričom ho občas dopĺňajú niektoré iné, mierne pozmenené axiomatické systémy teórie množín, z ktorých najznámejší je systém Gödelov-Bernaysov. Tento systém rozlíšením pojmov „množina“ a „trieda“ umožňuje prekonať časť obmedzení uložených na tvorbu množín v systéme Zermelovom-Fraenkelovom. s odstupom času

a s istou dávkou pragmatizmu teda možno konštatovať, že v problematike svojich základov, presnejšie v otázke ich bezospornosti, sa matematika za prvých tridsať až štyridsať rokov tohto storočia nedostala omnoho ďalej než tam, kde stála v r. 1908. V podstate bolo možné rovno prijať Zermelov systém, ďalej ho rozvíjať a budovať matematiku na ňom založenú a odpustiť si siahodlhé spory, najmä ak si uvedomíme, že práve Zermelov-Fraenkelov axiomatický systém predstavuje práve ten minimálny základ, na ktorom sa je väčšina matematikov (i keď tiež nie všetci) schopná dohodnúť. Je dosť pravdepodobné, že nebyť plamenných Brouwerových útokov rúcajúcich od základu vžité matematické predstavy a tradície, bolo by sa tak skutočne stalo a celá diskusia by pomerne rýchlo utíchla. Treba však vidieť, že práve tieto spory a nimi podnietené výskumy vrhli celkom nové svetlo na samotnú podstatu problematiky základov matematiky a do značnej miery sa zaslúžili o najvýznamnejšie objavy teórie množín a matematickej logiky, ktoré neskôr aspoň čiastočne umožnili ospravedlniť ono spomínané, spočiatku iba váhavo nastúpené, do značnej miery pragmatické, no od päťdesiatych rokov najrozšírenejšie východisko z krízy teórie množín.

Na druhej strane analógie s geometriou, ktoré sme spomínali v súvislosti s Bolzanovým a Cantorovým prístupom k nekonečným množinám, ako i v súvislosti s axiómami výberu a determinovanosti, aspoň dúfame, dosť jasne ukazujú absurdnosť a neoprávnenosť akýchkoľvek snáh zredukovať matematiku na štúdium modelov rôznych oborov matematických objektov v rámci nejakého raz a navždy pevne zvoleného axiomatického systému teórie množín (no nielen nej). Pokusy prelomiť putá tejto v súčasnosti vládnucej matematickej paradigmy treba len uvítať, nielen preto, že sú stále pomerne vzácne, ale najmä preto, že táto paradigma je tiež spoluzodpovedná za súčasnú vleklú krízu teórie množín a na nej založenej matematiky. To sú však už otázky, ktoré presahujú rámec tejto kapitoly.

8. Logika a logicizmus

Rozlíšiť zdanie od skutočnosti a získať o svete isté a nepochybné poznanie, to sú dve zo základných úloh – a možno zo všetkých najdôležitejšie –, ktoré dostala filozofia do vienka ešte pri svojom zrode v starom Grécku. Tieto úlohy prevzali ako spoločné dedičstvo a odkaz prakticky všetky smery západného myslenia. Zásadné rozdiely i jemné odchýlky medzi jeho rôznymi školami a prúdmi sa dajú do značnej miery vyložiť ako rozdiely v prístupoch k týmto úlohám.

Pritom z dnešného pohľadu je i rozdelenie filozofie, dané rôznymi odpoveďami na otázku, kde túto pravú skutočnosť hľadať, skoro také staré ako filozofia sama. Napríklad podľa Demokrita pravou skutočnosťou sú nedeliteľné atómy, líšiace sa len veľkosťou a tvarom, z ktorých pozostáva všetko. Jednotlivé veci sú potom zložené z atómov a ich odlišnosti sú spôsobené rôznosťou druhov atómov, ktoré ich tvoria, a spôsobom ich spojenia. Podľa Platóna zasa tento svet, daný nám skrze zmysly, vôbec nie je tým pravým, skutočným svetom. Pravou skutočnosťou sú idey, pobývajúce vo svojom ideálnom svete, ktorého je tento svet iba nedokonanalým odrazom, tak ako sú jednotlivé veci iba viac či menej dokonalými odrazmi rôznych ideí.

Odhaliť za zdaním pravú skutočnosť a získať o nej pravé a nepochybné poznanie znamená v prvom rade spoznať poriadok sveta, jeho zákonitosti a nevyhnutnosti, teda to, čo je vo svete stále a nemenné. Jednotlivé úkazy a veci sú naopak premenlivé, nestále a dočasné. Práve preto treba cez javy preniknúť k ich podstatám a za zmenami odhaliť ich zákonitosti a z nich potom spätne vyložiť jednotlivé javy i zmeny, ktorým podliehajú.

Zdrojom takéhoto poznania však nemôžu byť zmysly, ktoré nás často klamú, ani naša každodenná skúsenosť. Tá môže naše uvažovanie síce podnietiť, ale k pravému poznaniu môžeme dospieť len po ceste myslenia a rozumu. V tom sú skoro všetci starí myslitelia vzácne zajedno.

Filozofia, nesúca vo svojom lone zárodky budúcich európskych vied, tak sama prichádza na svet ako špekulatívna veda a takou i nadlho ostáva (a ostatné vedy s ňou) – minimálne po celý stredovek. Opovrhovanie zmyslami a skúsenosťou a zavrhovanie experimentu, často navyše spojené s lipnutím na tradičných dogmách a sankcionovaním odchýliek a „úchyliek”, hlboko poznačia európske myslenie a vzdelanosť. Až spojeným, postupným a dlhodobým úsilím všestranného tvorivého vzopätia renesancie, nastupujúcej novovekej prírodovedy, francúzskeho osvietenstva a skeptického britského empirizmu sa podarí z vlády tejto „jednomyseľnosti” vymaniť.

Ale to už značne predbiehame. Vráťme sa teda späť a prijmime za bernú mincu tézu, že zdrojom pravého poznania je rozum, prípadne rozumové uvažovanie a rozumné myslenie,

ktorých je rozum nástrojom. Je však dobre známe, že aj rozum, tak ako každý nástroj, možno používať správne i nesprávne. Teda aj rozum, používaný nesprávne, nás môže zviesť na scestie. Potom však už nebude zdrojom pravého poznania, ale zdrojom poblúdenia a omylu.

(O čo je potom rozum lepší než zmysly, a odkiaľ tá slepá dôvera v rozumové špekulácie a nedôvera k zmyslovému a skúsenostnému poznaniu – to už autor nevie vysvetliť. Pokračujme však tam, kde sme prestali.)

Je preto nesmierne dôležité vedieť s týmto nástrojom (rozumom) správne zaobchádzať, t. j. poznať pravidlá pre správne uvažovanie a vedenie rozumu. Veda skúmajúca tieto pravidlá sa nazýva *logika*.

Trochu presnejšie môžeme logiku vymedziť ako vedu o formách a zákonoch správneho (t. j. „logického”) pojmového (t. j. na jazyk viazaného) myslenia a usudzovania. Logika pritom abstrahuje od konkrétneho obsahu jednotlivých tvrdení a úsudkov a skúma hlavne nasledujúce dva úzko súvisiace okruhy otázok.

Pri trochu pozornejšom pohľade si všimneme, že jednoduché výroky či tvrdenia možno pomocou tzv. logických spojok rôznym spôsobom spájať a kombinovať do výrokov zložených. (Kvôli jednoduchosti si vlastnosti a vzťahy, ku ktorým okrem spojok môžu pristupovať navyše i kvantifikátory, nebudeme všímať.) Pritom pravdivosť či nepravdivosť výsledného tvrdenia nezávisí od obsahu príslušných jednoduchých výrokov, ale len od ich pravdivostných hodnôt a spôsobu spojenia. Jednou z úloh logiky je potom klasifikácia výrokových foriem, na základe ktorej z nich možno vydeliť formy vždy pravdivé, nezávisle od pravdivostných hodnôt tvoriacich ich jednoduchých výrokov – tzv. logické zákony alebo *tautológie*, ďalej formy nesplniteľné, t. j. vždy nepravdivé atď. Predpokladáme, že čitateľ pozná množstvo tautológií, napr. zákon sporu $\neg(\varphi \& \neg\varphi)$, zákon vylúčenia tretieho $\varphi \vee \neg\varphi$, zákon dvojitej negácie $\varphi \Leftrightarrow \neg\neg\varphi$ a pod.

Druhý okruh otázok sa týka všeobecných podmienok (opäť formálneho rázu), za ktorých z určitých tvrdení, tzv. *predpokladov* alebo *premís*, vyplýva nejaké iné tvrdenie, tzv. *dôsledok* alebo *záver*. Logika potom popisuje akési vyabstrahované úsudkové formy nazývané podľa Aristotela kategorické *sylogizmy* alebo v novšej terminológii *odvodzovacie pravidlá*. Sylogizmu rozumieme tak, že vždy, keď sú pravdivé nejaké tvrdenia, ktoré majú tvar jeho premís, je pravdivé i tvrdenie, ktoré dostaneme naplnením príslušným konkrétnym obsahom záveru tohto sylogizmu. Zrejme čitateľovi je známych niekoľko sylogizmov, napr. *modus ponens* – z $\varphi \Rightarrow \psi$ a φ vyplýva ψ, *modus tollens* – z $\varphi \Rightarrow \psi$ a $\neg\psi$ vyplýva $\neg\varphi$, a pod.

Tautológie i sylogizmy potom povyšujeme na logické zákony či princípy, t. j. pravdy čistého rozumu. Tým však nechceme tvrdiť, že logika sa vyčerpáva nejakým zoznamom tautológií či sylogizmov.

Ešte si všimnime, že námaha vynaložená na odhalenie logických zákonov a princípov sa nám vyplatí. Ich znalosť nás totiž často zbavuje nutnosti myslieť, čo býva neraz namáhavé, a hovorí sa, že to tiež bolí. Pri posudzovaní správnosti nejakých úsudkov a úvah stačí potom celkom mechanicky overiť, či sa príslušná úvaha v každom kroku riadi zákonmi logiky.

I pomerne úzke a zjavne neúplné vymedzenie predmetu logiky, ktoré sme tu stručne načrtli, nám však už umožňuje položiť si zásadnú otázku: Na základe čoho máme právo tvrdiť, že logické zákony a princípy (ako sú tautológie a sylogizmy) sú naozaj správne?

Už sme si povedali, že myslenie býva správne, menej správne i nesprávne, uberajúce sa po cestách rozumu i nerozumu, logické i nelogické. Logika teda nemôže myslenie popisovať, potom by ju totiž príklady „nelogického” myslenia vyvracali. Tak sa však na veci nedívame. Naopak, ak sa myslenie nezhoduje s logikou, tým horšie preň – bez váhania ho označíme za nesprávne. Logika teda vystupuje voči mysleniu ako niečo aspoň zdanlivo prvotné a plní voči nemu normatívnu funkciu.

Tézu o apriórnom charaktere logických princípov – ako nejakých vrodených foriem – predchádzajúcich naše myslenie i skúsenosť, však značne problematizujú a spochybňujú viaceré výskumy myslenia primitívnych národov uskutočnené v dvadsiatom storočí. Jeden z takých výskumov viedol A. R. Lurija v 30. rokoch v sovietskej Strednej Ázii. Vo svojej knihe *O historickom vývoji poznávacích procesov* o. i. popisuje výskumy úrovne logického myslenia zaostalých, negramotných pastierov a roľníkov. Títo ľudia, hoci mnohí z nich sa pri riešení praktických otázok bežného života svojho spoločenstva vyznačujú značnou inteligenciou, nie sú schopní ani ochotní urobiť z daných premís pre nás očividný logický záver.

V prípadoch, keď príslušné tvrdenia neprekračujú ich skúsenostný obzor, možno ich k vysloveniu logického dôsledku primäť iba veľmi ťažko a len za podmienky, že tak záver, ako i premisy sú samy osebe pravdivé. Nechápu však celý sylogizmus ako jediný celok, lež ako tri viac-menej nezávislé tvrdenia.

V prípadoch, keď o niektorých predmetoch vystupujúcich v jednotlivých tvrdeniach sylogizmu nemajú žiadnu skúsenosť ani vedomosti, ktoré by im umožnili usudzovať na ich pravdivosť, sú len veľmi ťažko schopní celý sylogizmus zreprodukovať, nieto ešte prijať na základe premís za podmienene pravdivý aj záver. Skrátka, zásadne odmietajú myslieť hypoteticky.

Ďalšia generácia, ktorá prešla školskou dochádzkou, už podobné zábrany nemá. Ich dozvukmi sú však ťažkosti s chápaním tabuľky pravdivostných hodnôt implikácie všade tam, kde sa táto téma vo výuke objaví, od základných škôl až po univerzity.

Uvedené skutočnosti svedčia skôr v prospech tézy, že logické myslenie sa formuje postupne v priebehu historického vývoja toho-ktorého ľudského spoločenstva a jeho vývoj je tiež spoločensky podmienený. „Správnosť" logiky je podložená empiricky a induktívne. Až na veľmi vysokom a špecifickom stupni štrukturalizácie a intelektuálneho rozvoja nejakého spoločenstva vzniká potreba uvedomelej reflexie foriem myslenia a vyjadrovania, vedúca k odlúčeniu jednotlivých logických zákonov a princípov z obrovského množstva rozmanitých konkrétnych prípadov, ktoré sa ukázali v zhode so skutočnosťou.

Práve na uvedomení si tejto zhody sa potom zakladá naša dôvera v použiteľnosť logiky aj za obzorom našej skúsenosti. Táto dôvera je dokonca natoľko pevná, že prípadné zlyhanie, napr. nesplnenie očakávaného záveru nejakého sylogizmu v konkrétnej situácii, nijako nenaštrbí našu dôveru v logiku. Naopak, vedie nás to k presvedčeniu, že niektorý z prijatých predpokladov zrejme nebol splnený, hoci sa nám to pôvodne zdalo.

Takýto druh dôvery a presvedčenia však len skúsenosťou, nech by sa opakovala koľkokoľvek ráz, nijako nezdôvodníme. Logika nie je systém podmienených reflexov. Skúsenosť nás môže nanajvýš priviesť na prah akéhosi ideálneho sveta logických foriem a prispieť tak k tomu, aby sa nám otvoril. No sama nám ho nijako otvoriť nemôže. Na takýto svet sa už, s prípadnými drobnými zmenami, vzťahuje značná časť našich úvah z prvej kapitoly.

Komu sa tento svet otvorí, ten postupne zahliadne logické princípy v ich čistote, odlúčené od konkrétneho, obsažného pojmového myslenia. Niektoré pohľady do tohto sveta pripomínajú obraz akejsi mimo času umiestnenej kauzality. Ešte raz však poznamenávame, že odlúčenie logiky od pojmového myslenia, t. j. cesta na prah ideálneho logického sveta, nie je možné skôr, ako sa logické formy v myslení a vyjadrovaní objavia a začnú sa tam bežne vyskytovať. Jednoducho logiku nemožno odlúčiť skôr, ako sa myslenie a vyjadrovanie stanú logickými.

Prvé doklady o otvorení sveta logických foriem, podobne ako sveta ideálnych geometrických objektov, sa nám dochovali z gréckej antiky.

Politický a právny systém demokratických polis vyvoláva potrebu kultivovať umenie argumentácie. Svoje názory a záujmy v nich už nemožno presadzovať výlučne autoritou moci, ale o ich správnosti či oprávnenosti je potrebné ostatných presvedčiť váhou pre nich prijateľných a zrozumiteľných argumentov. Logika sa tak rozvíja, spočiatku skryte a neuvedomene, neskôr už otvorene a cieľavedome, na pôde *rétoriky* a tzv. *eristiky*, t. j. umenia viesť spor.

Eristiku dovádzajú do krajnej polohy *sofisti*. Postupne sa z nej stáva umenie dokázať zdanlivo logickými argumentami čokoľvek. Sofistika slúži miestami len na pobavenie publika, no miestami aj celkom prozaickým zištným cieľom. Podaktoré dochované sofizmy však nie sú založené na nijakej šikovne zamaskovanej logickej chybe. Napríklad nám už známy Epimenidov paradox či Zenónove apórie sú logicky bezchybné a od čias svojho vzniku až podnes pôsobia ako varovné memento pre príliš sebavedomé snahy a nádeje dosiahnuť úplné a nepochybné poznanie len cestami rozumových úvah.

Tým sme sa však už z pôdy rétoriky a eristiky dostali na pôdu filozofie, na ktorej sa logika rozvíja v nemenšej miere. Tento rozvoj je inšpirovaný jednak matematikou, v ktorej logické myslenie dospelo do svojej najpokročilejšej podoby a odlúčenie logických foriem od ich konkrétneho obsahu v nej predstavuje najmenšie ťažkosti. Jednak, a to predovšetkým, je logika kultivovaná ako *dialektika*, t. j. umenie hľadať spoločne pravdu v rozhovore (dialógu). v tomto umení je neprekonateľným majstrom Sokrates.

Prvé filozofické školy, ktoré sa systematicky zapodievali otázkami logiky, vznikli v gréckych mestách Elea a Megara. K najvýznamnejším predstaviteľom eleatskej školy patria Parmenides, filozof učiaci o jednote a stálosti bytia a o nemožnosti zmeny pohybu, a jeho žiak Zenón z Eley, autor znamenitých apórií, ktoré mali potvrdiť názory jeho učiteľa. Za zakladateľa megarskej školy býva považovaný Euklides z Megary (nie je totožný s autorom *Základov*); za jej najvýznamnejšieho predstaviteľa je považovaný Eubulides z Milétu, ktorému sa zvykne pripisovať formulácia Epimenidovho paradoxu, no taktiež paradoxu hromady a ďalších sofizmov.

Za zakladeľa logiky ako samostatnej vednej disciplíny je právom považovaný Aristoteles zo Stagiry (384-322 pr. n. l.), autor fundamentálneho a obsiahleho diela *Organon* (nástroj).

Pod týmto názvom je zahrnutých šesť zväzkov venovaných analýze a systematizácii dovtedy známych poznatkov logiky, no taktiež stratégie a taktiky vedenia sporu a metodologických zásad výstavby deduktívnych teórií. v tomto diele nájdeme sformulovanú väčšinu logických zákonov (ako napr. zákon sporu a zákon vylúčenia tretieho) ako i do vysokej dokonalosti dovedenú, ucelenú teóriu kategorických sylogizmov. Aristotelova logika pokrýva značnú časť dnešného výrokového počtu a predikátového počtu jednomiestnych predikátov. Významné miesto v jeho diele zaujíma tiež kritika sofistov a analýza logických chýb, klamných, zdanlivo logických úvah či zneužití logiky v ich argumentáciách a dôkazoch.

Základy výrokovej logiky rozpracovali nezávisle od Aristotela a jeho žiakov Teofrasta a Eudema aj stoickí myslitelia, hlavne Chrysippos. No diela stoikov, podobne ako diela eleatov a megarikov môžeme, žiaľ, rekonštruovať len zo skromných dochovaných zlomkov a zo zmienok a poznámok v dielach neskorších autorov.

Osamostatnenie logiky, ku ktorému došlo hlavne zásluhou Aristotelovou, a následný rozvoj viac-menej len v prepojení s filozofiou, do značnej miery odrezali logiku od zdrojov prirodzených podnetov z iných vied, najmä matematiky. Na druhej strane matematika naďalej používa a neustále rozvíja svoju vlastnú logiku, podstatne bohatšiu než logika filozofická, no ešte dlho ju neosamostatňuje ani cieľavedome nevyužíva pre vlastné potreby a ciele. Logika tak v dôsledku svojho predčasného osamostatnenia na dlhé obdobie zaostala za matematikou, no taktiež za inými vedami. Inak povedané, myslenie o myslení zaostalo za myslením skoro o všetkom ostatnom. Dve izolované výnimky, totiž anticipácia matematickej logiky ako „kombinatorického umenia" ešte v stredoveku Raimondom Lullom a ambiciózny Leibnizov projekt, pri ktorom sa o chvíľu pristavíme podrobnejšie, nemohli tento stav zásadnejšie zmeniť. K zlomu vo vývoji logiky, spôsobenému jej spojením s matematikou, dochádza až v polovici 19. storočia.

No zatiaľ sa nám prichodí ešte aspoň na chvíľu vrátiť do stredoveku. Stredoveká logika, tak ako napokon skoro celé stredoveké myslenie, nadväzuje na aristotelovskú tradíciu, menovite na Aristotelove logické spisy dochované v Boethiovom latinskom preklade. Logika sa v tom čase pestuje takmer výlučne na pôde scholastickej filozofie a slúži hlavne ako nástroj špekulácií rozumárskej teológie. Tu dochádza tiež k pozoruhodnému cibreniu jej metód, no – podobne ako v iných oblastiach – zásadný pokrok oproti Aristotelovi pozorovať nemožno.

Typickým, a zrejme v tej dobe i najdôležitejším príkladom využitia logiky sú pokusy dokázať existenciu Boha z evidentných právd čistého rozumu. Podobné pokusy však možno zaznamenať aj v staroveku, napr. u Platóna i stoikov, no taktiež u niektorých novovekých racionalistov, napr. u samého René Descarta.

Antický výklad, podľa ktorého nevyhnutnosti a zákonitosti sveta, predstavujúce to pravé poznanie, poznávame rozumovými úvahami, a nie skrze zmysly a skúsenosť, pretrváva i po celý stredovek. K rozumu sa však druží ešte jeden zdroj nepochybných právd a istôt. Tým, najmä pokiaľ ide o pravdy náboženské, je *Zjavenie* v tej podobe, v akej nám o ňom podáva správu Písmo Sväté. Pokusy dokázať Božiu existenciu z čistého rozumu tak vlastne usilujú o elimináciu potreby oprieť sa o Zjavenie v tejto základnej a najdôležitejšej teologickej otázke. Zároveň jasne ukazujú, že tí, ktorí o to usilujú, príliš mnoho

dôvery v Zjavenie neprechovávajú. Inak by asi nepociťovali potrebu podoprieť svoju *vieru* rozumovými argumentmi a zvrátiť ju tak v *poznatok*. Teda pravé meno ich skrytého motívu je malovernosť. Ošemetnosti podobných snáh si bol dobre vedomý sv. Tomáš Akvinský. Na druhej strane bol to práve on, kto podriadil Boha rozumu, menovite zákonu sporu.

Ak teda pripustíme, že rozum je *jediným* zdrojom istého a nevyhnutného poznania, tak, pokiaľ sa chceme utvrdiť v nutnosti Božej existencie, musíme ju z nejakých evidentných rozumových právd dokázať len s použitím logických prostriedkov. Pritom samotná Božia existencia zrejme *evidentnou* pravdou nie je. To by sme ju totiž dokazovať nemuseli. A takisto by nemohla mať toľko pochybovačov.

Pre človeka z konca 20. storočia je veľmi ťažké vžiť sa do myslenia a psychiky človeka stredovekého. Výklad, ktorý sme práve predviedli, má svoju logiku. Je to však logika zakotvená v myslení a psychike súčasníka, poučená výsledkami snáh, ktoré hodnotí a pozoruje so značným časovým odstupom. Ak nám z nej vyplýva, že pravé meno pre motív dôkazov Božej existencie z princípov čistého rozumu je malovernosť, neznamená to ešte, že toto hodnotenie je primerané dobe, na ktorú ho vzťahujeme. Snáď rovnako pravdepodobným motívom mohla byť oslava rozumu ako najveľkolepejšieho z Božích darov človeku. Veď čo už viac možno dodať na jeho slávu, než to, že i len skrze rozum samotný sme schopní spoznať Pravdu všetkých právd. No taktiež mohla byť motívom jednoducho snaha pomôcť nešťastníkom, ktorým sa nedostalo daru viery, no majú aspoň dar rozumu, aby cestou rozumu aj vieru nadobudli.

Jednotlivými dôkazmi Božej existencie sa tu už zapodievať nebudeme. Obmedzíme sa len na niekoľko poznámok. Trochu zjednodušene povedané a nehľadiac na motívy, pripomína väčšina týchto dôkazov dômyselne zamaskované sofizmy, navlečené do dôstojného hávu primeraného vážnosti a posvätnosti preberanej otázky. Medzi ich kritikou, ktorú podáva Imanuel Kant vo svojej *Kritike čistého rozumu*, a Aristotelovou kritikou sofistických argumentov tiež možno nájsť v mnohom paralely a analógie.

Len ako perličku ešte spomeňme, že v Gödelovej pozostalosti sa našiel jeden list papiera, s dôkazom nevyhnutnosti Božej existencie, vychádzajúcim z postulátov obvyklých pre stredoveké dôkazy. V konečnom dôsledku nie je tento dôkaz o nič presvedčivejší než tie predošlé. Zaujímavé však je, že dômyselným použitím modálnej logiky druhého rádu sa Gödelovi podarilo nájsť medzeru v Kantovej kritike a podať dôkaz, ktorému z formálneho hľadiska nemožno nič vytknúť.

Žiaľ, nevieme, ako Gödel svoj dôkaz myslel a čo ním chcel naozaj dokázať. Možno skutočne Božiu existenciu, možno nedôslednosť a nedostatočnosť Kantových argumentov, ale možno taktiež niečo celkom iné. Možno nám to nejaký ďalší nález v jeho pozostalosti raz prezradí.

Aby sme však čitateľa neukrátili, jeden dôkaz tu pre jeho pobavenie i poučenie predsa len uvedieme. Keďže sa však nechceme nikoho dotknúť, nebudeme dokazovať existenciu Boha, ale existenciu hranatého kruhu. Čitateľ už sám ľahko nahliadne ako možno podľa našej schémy dokázať existenciu čohokoľvek, čo si len zmyslí (napr. jednorožca). Namiesto existencie hranatého kruhu dokážeme ešte viac – totiž existenciu *existujúceho* hranatého kruhu. Tým budeme hotoví, lebo ak existuje existujúci hranatý kruh, tak tým skôr existuje hranatý kruh – totiž ten existujúci. Náš dôkaz budeme robiť sporom. Predpokladajme teda, že existujúci hranatý kruh neexistuje. Ale to už je hneď náš hľadaný spor – *existujúci* hranatý kruh zrejme nemôže neexistovať. Tak ako cválajúci kôň cvála, existujúci hranatý kruh existuje.

Uvedomenie si moci rozumu, navyše reflektujúceho v logike svoje vlastné zákony a princípy, zdanlivo apriórne a z ničoho neodvodené, vedie od preceňovania úlohy rozumu v poznaní až k predstavám o jej výlučnosti a snahám odvodiť všetko isté poznanie len z týchto zákonov a princípov. Snahy o dôkaz Božej existencie sú len jedným z príkladov tohto druhu. Druhým príkladom, ktorým sa konečne dostávame k jadru tejto kapitoly, je *logicizmus* v matematike.

Základná téza logicizmu spočíva v tvrdení, že matematika je odvetvím logiky. V matematických pojmoch je potrebné odhaliť logický základ, uchopiť ich v logickej štruktúre a definovať ich ako pojmy logiky. Aj matematické vety je potrebné dokazovať ako teorémy logiky.

Hoci uvedenú tézu ako prvý vyslovil až Gottlob Frege (1848-1925), jej korene siahajú ešte k Gottfriedovi Wilhelmovi Leibnizovi (1646-1716), ktorý sa domnieval, že s použitím matematických metód sa mu podarí rozšíriť logiku na *mathesis universalis* – univerzálnu vedu o myslení, ktorej púhou aplikáciou na konkrétne pojmy ľubovoľnej vednej oblasti bude možné získavať v nej nové poznatky. Usiloval pritom o vytvorenie symbolického kalkulu, ktorý by umožnil previesť bežné ľudské myslenie na operácie so znakmi podľa presne stanovených pravidiel, takže overenie správnosti, prípadne odhalenie nesprávnosti nejakého úsudku by bolo možné zredukovať len na púhe mechanické prehliadnutie symbolického textu. Dodnes sa celkom presne nevie, ako ďaleko sám Leibniz v napĺňaní svojho zámeru pokročil.

Presnejšie možno Leibnizove snahy zhrnúť do troch bodov:

a) vytvorenie univerzálneho systému, ktorý by všetky základné pojmy charakterizoval im priradenými znakmi a zložené pojmy kombináciami príslušných znakov (tzv. characteristica universalis);

b) vybudovanie symbolického kalkulu, ktorý by umožňoval previesť logické úvahy s pojmami na výpočty so zodpovedajúcimi znakmi (tzv. calculus ratiocinator);

c) formulácia rozhodovacej procedúry, ktorá by o každom takto symbolicky vyjadrenom tvrdení umožnila rozhodnúť, či je pravdivé alebo nepravdivé (tzv. ars iudicandi).

Zámery, ktoré pritom Leibniz sleduje, nie sú nijako skromné. Pokrok všetkých vied, medzi nimi i matematiky, by bol len jedným, a vôbec nie najdôležitejším dôsledkom. Všetky spory medzi ľuďmi i medzi národmi by ustali. Ak by sa aj vyskytli nejaké nezhody a názorové rozdiely, stačilo by si spoločne sadnúť a počítať. Tak by sa zaraz zistilo, kto má pravdu, a túto snezvratnou jasnosťou a presvedčivosťou spoznanú pravdu by, samozrejme, všetci prijali a rešpektovali. ľudstvo by mohlo postupne objavovať a nakoniec vyčerpať všetky pravdy. Medzi nimi miesto najpoprednejšie bude zaujímať Pravda o Božej existencii a pravom náboženstve, «ktoré najviac súhlasí s rozumom, a nabudúce sa bude treba obávať odpadnutí od neho práve tak málo, ako sa treba obávať odvrátenia ľudí od aritmetiky a geometrie, ktorú sa raz naučili».

Akokoľvek utopicky a naivne nám tieto Leibnizove nádeje môžu pripadať dnes, jeho projektu nemožno uprieť veľkolepos

posť. Pokiaľ ide o metódy, jeho génius predišiel svoju dobu o viac než dve storočia a presne predvídal smery neskoršieho rozvoja matematickej logiky – výrokový a predikátový počet, Gödelovu aritmetizáciu metamatematiky, ako aj symbolickú reprezentáciu poznatkov využívanú pri počítačovej implementácii a spracovaní.

Prvý známy významnejší pokrok v matematizácii logiky dosiahol až George Boole (1815 -1864), ktorý, inšpirovaný úspechmi vtedajšej abstraktnej algebry, podstatne rozšíril sféru aplikácie jej metód vytvorením nového symbolického kalkulu tvrdení a vlastností, dnes nazývaného výrokový počet, ktorý v podstate formalizoval základné princípy tvorby zložených výrokov pomocou logických spojok, stotožňujúc pritom výroky, ktorých pravdivostná hodnota je na základe princípov klasickej aristotelovskej logiky vždy rovnaká. Príslušná algebraická štruktúra, ktorá takto vznikne, sa dnes nazýva Boolova algebra, a popri už spomínanej výrokovej má tiež štandardnú množinovú interpretáciu – algebru $\mathcal{P}(X)$ všetkých podmnožín ľubovoľnej množiny X.

Približne v tom istom čase sa k podobným výsledkom nezávisle dopracoval Augustus de Morgan (1806 -1871), ktorý navyše obohatil logiku o štúdium relácií medzi viacerými objektmi. Tieto otázky sa síce sporadicky vyskytli už u Aristotela aj u niektorých iných starovekých a stredovekých logikov, systematická pozornosť im však dovtedy venovaná nebola.

Boolove a de Morganove myšlienky potom ďalej rozvinuli najmä Ch. S. Peirce a E. Schröder. Konečne zavedením kvantifikátorov a odvodzovacích pravidiel, formalizujúcich klasické sylogizmy, už formálna logika nadobudla podobu veľmi blízku súčasnému predikátovému počtu, na čom mali zásluhu najmä

Frege a Peano, ktorý okrem iného výrazne zjednodušil a sprehľadnil ťažko čitateľnú Fregeho symboliku. A prakticky vzápätí po dovŕšení prvej etapy svojej matematizácie sa naopak nová matematická logika stáva cieľavedome využívaným nástrojom matematického štúdia, ako i jedným zo základných kameňov budovy matematiky. Fregeho tézu vyslovenú na začiatku druhej časti tejto kapitoly, vychádzajúcu z viery, že tento základný kameň samojediný udrží celú stavbu, teda môžeme interpretovať ako pokračovanie Leibnizovho zámeru aspoň na pôde matematiky. Navyše druhotnosť a odvodenosť matematiky vo vzťahu k logike jej tým zároveň poskytuje záruky správnosti a bezospornosti natoľko pevné, ako sú samy najvšeobecnejšie princípy a zákony ľudského myslenia.

Bude zaujímavé ešte raz si uvedomiť, na aké dedičstvo logicizmus vlastne nadväzuje. Vo svetle Leibnizových zámerov je príbuznosť logicistickej tézy, požadujúcej odvodiť matematiku z logiky, a pokusov stredovekých scholastických mysliteľov i niektorých ich starovekých predchodcov či novovekých nasledovníkov o dôkaz existencie Boha z princípov čistého rozumu (teda logickými prostriedkami) viac než očividná. Leibniz sa na rozdiel od nich o niečo podobného nepokúša. No zrejme tak nečiní jedine preto, lebo si jasne uvedomuje, že jeho zamýšľaná metóda nie je ešte dostatočne rozpracovaná, aby umožnila zvládnuť takúto náročnú úlohu.

V napĺňaní logicistickej tézy vykonal Frege nemalý kus práce. Predovšetkým sa mu podarilo vybudovať v logických pojmoch aritmetiku prirodzených čísel, čo mu umožnilo logickú konštrukciu čísel racionálnych a reálnych a otvorilo cestu k logickému výkladu analýzy. No jeho logický systém, v ktorom sa voľne narábalo nielen s vlastnosťami objektov, ale i s vlastnosťami vlastností atď., sa čoskoro ocitol v podobných ťažkostiach ako Cantorova teória množín – napriek všetkej úzkostlivej starostlivosti svojho tvorcu sa ukázal sporným. Dokonca B. Russell svoj už spomínaný paradox objavil práve pri štúdiu prvého zväzku Fregeho diela *Základy aritmetiky*. No úlohu pokračovať v jeho diele vzal na svoje ramená sám Bertrand Russell (1872 - 1970). V čase, keď druhý zväzok tohto diela bol práve v tlači, zastihol Fregeho Russellov list, upozorňujúci na ťažkosti vyvolané «predikátom, ktorý sa nevzťahuje na seba». Zrútenie jedneho zo základných pilierov Fregeho teórie bolo zároveň osobnou tragédiou jej tvorcu, ktorú niesol mužne a statočne. Avšak z rany, ktorú jeho teórii zasadil objav Russellovej antinómie, sa už do konca života celkom nepozviechal.

Fregeho logicizmus je spätý s dôsledne platónskym poňatím existencie matematických objektov svojho autora, čo je v zhode s tradíciou, z ktorej tento myšlienkový smer vyrastá. Na druhej strane, Russell kladie hlavný dôraz na jazyk matematiky a logiky, teda v jeho poňatí prevládajú pozitivistické tendencie. Navyše Russell ako filozof vyrastá z tradície britského empirizmu a, – v protiklade k Leibnizovi i Fregemu – je zameraný vyhranene protináboženský. Ťažko uveriť, že najvýznamnejší predstaviteľ logicizmu a autor knihy *Prečo nie som kresťanom a iné eseje* je jedna a tá istá osoba. Ešte v roku 1948 (!) sa Russell zúčastňuje diskusie s pátrom F. C. Coplestonom vysielanej na rozhlasovej stanici BBC. Páter Copleston v nej hneď na začiatku deklaruje úmysel dokázať existenciu Boha filozofickými úvahami (!), no jeho priehľadný pokus o „sokratovský” dialóg nemá proti Russellovi, prevyšujúcemu ho o hlavu v pohotovosti, brisknosti i rozhľade, nijakú šancu.

Ale vráťme sa k logicistickému programu v matematike, o ktorom, akokoľvek sa nám to zdá čudné, sa Russell domnieval, že je nielen schopný prekonať čerstvo objavené paradoxy, no ďalším rozpracovaním poskytne matematike solídny základ a vyvedie ju z krízy, v ktorej sa ocitla. Russell obrátil svoju pozornosť na jav autoreferencie, ktorý sa vyskytuje vo všetkých skôr uvedených paradoxoch – každý z nich v sebe zahŕňa akýsi bludný kruh: množina alebo vlastnosť, ktorá sa v ňom definuje, už predpokladá samu seba vo svojej definícii. Takéto definície dostali názov *nepredikatívne*. Tak napríklad pojem „množina všetkých množín" už predpokladá sám seba, lebo v ňom vystupujúca vlastnosť „byť množinou" neznamená nič iného, než „patriť do množiny všetkých množín". Podobne aj paradoxné tvrdenie „Táto veta je nepravdivá." vypovedá o sebe samom. Russell sa rozhodol ochrániť matematiku pred spormi tým, že z nej takéto a podobné tvrdenia a všetky nepredikatívne definície jednoducho vylúčil.

No podobné paradoxy môžu vzniknúť nielen v dôsledku bezprostrednej autoreferencie. Napríklad dvojica tvrdení

„Nasledujúce tvrdenie je nepravdivé."

„Predchádzajúce tvrdenie je pravdivé."

vedie takisto k sporu. Čitateľ sám ľahko nahliadne, ako možno naznačenou metódou vytvoriť autoreferenčný sporný cyklus ľubovoľnej dĺžky. Russell tak bol nútený vybudovať značne dômyselný a rozsiahly systém zákazov týkajúcich sa formulácie matematických tvrdení. Tento systém, založený na dôslednom a mnohonásobnom rozlišovaní jazyka a metajazyka v hierarchii pozostávajúcej z potenciálne nekonečne mnohých úrovní, je známy pod názvom *rozvetvenej teórie typov*.

Skôr než aspoň stručne naznačíme, v čom spočíva jeho podstata, treba však podotknúť, že výstavba logiky a matematiky v rámci teórie typov nie je nevyhnutným dôsledkom logicistickej tézy.

Základné objekty, čiže indivíduá sú objekty typu o. Ak $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n$ sú typy, tak vzťah $\varphi\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kde x_i označuje premennú pre objekt typu t_i, je objekt typu $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Pritom typ o je úrovne 0 a úroveň typu $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ je maximum z úrovní typov $t_1,\ t_2, \ldots,\ t_n$ zväčšené o jednotku. Špeciálne, vlastnosti základných objektov majú typy úrovne 1, ich vlastnosti typy úrovne 2 atď. Zrejme ak sa v matematike obmedzíme len na tvrdenia, vlastnosti a vzťahy spadajúce do naznačenej hierarchie typov, úroveň typu ľubovoľného objektu vystupujúceho v nejakom vzťahu bude nižšia než úroveň typu tohto vzťahu, takže k žiadnej autoreferencii, či už bezprostrednej alebo sprostredkovanej nejakým cyklom, dôjsť nemôže.

Na druhej strane cena, ktorú nám za to prichodí zaplatiť, je neprimerane vysoká: celú matematiku musíme vtesnať do značne zložitej a umelej typovej štruktúry a preventívne z nej vylúčiť i celý rad tvrdení a definícií, ktoré vôbec nevedú k sporu, len sa prehrešujú proti hierarchii teórie typov. Takého druhu je napríklad tvrdenie „Táto veta je pravdivá.", pojem „množina všetkých množín, ktoré sú prvkami samej seba", no čo je horšie, i pojmy infima a suprema podmnožiny reálnych čísel. Taktiež prirodzené čísla sa v logicistickom poňatí nepodarilo definovať inak než nepredikatívne. Tieto posledné, pre matematiku nepostrádateľné príklady je potom nevyhnutné implantovať do teórie typov zložitými okľukami.

Veľká časť matematiky bola ako odvetvie logiky vybudovaná na základe teórie typov vo fundamentálnom diele B. Russella a jeho učiteľa Alfreda Northa Whiteheada (1861-1947), v trojzväzkových *Principia Mathematica*, ktoré vyšli v rokoch 1910 až 1913. V súčasnosti používaná logická symbolika je v podstate celá prevzatá z tohto diela. Aby sa však v systéme Principia Mathematica dala vybudovať matematická analýza, ktorá, ako sme už videli, obsahuje nepredikatívne definície, museli jej autori zaviesť rozlíšenie na rôzne *rády* i vnútri jednotlivých typov a postulovať tzv. *axiómu redukcie*, očividne inšpirovanú výsledkami Cantorovej konštrukcie reálnych čísel.

Presná definícia rádov je pomerne jemná a zložitá záležitosť, takže ňou čitateľa nebudeme zaťažovať. Na vysvetlenie len uveďme, že objekty rádov vyšších než 1 v rámci daného typu $t \neq o$ vznikajú kvantifikáciou cez premenné úrovne väčšej alebo rovnej úrovni t. Napríklad vzťah $F(x, \varphi)$, do ktorého vstupujú objekty x typu o (t. j. úrovne 0) a vlastnosti $\varphi(x)$ takýchto objektov, teda objekty typu (o) (a úrovne 1) je sám objekt typu $(o, (o))$ a úrovne 2. Ak $F(x, \varphi)$ neobsahuje nijaké kvantifikátory, tak vlastnosti $\psi_1(x) \equiv (\exists\varphi)(Fx, \varphi)$ a $\psi_2(x) \equiv (\forall\varphi) F(x, \varphi)$ sú objekty typu (o), ich rád však už je rovný 2. Axióma redukcie potom tvrdí, že k ľubovoľnej vlastnosti alebo vzťahu hocako vysokého rádu vnútri daného typu $t \neq o$ existuje s ňou ekvivalentná vlastnosť alebo vzťah rádu 1.

Axióma redukcie vyvolala značné pochybnosti. Sám Russell sa už čoskoro prestal pokúšať hájiť stanovisko, že táto axióma má logický charakter, a priznal, že jej prijatie možno zatiaľ zdôvodniť len čiste pragmatickými pohnútkami. No taktiež používanie axiómy nekonečna a axiómy výberu sa stalo kameňom úrazu logicistickej tézy. Prijatie axiómy nekonečna bolo nevyhnutné, aby sa v systéme Principia Mathematica dala vybudovať čo i len aritmetika prirodzených čísel.

Vynútené používanie uvedených troch axióm, ktoré očividne nie sú logickej, ale matematickej, teda obsažnej povahy, a taktiež skryté používanie prirodzených čísel ešte pred ich formálnym vybudovaním vnútri systému, nevyhnutné kvôli opisu hierarchie typov, sproblematizovalo samotnú základnú logicistickú tézu. Navyše však nastolilo otázku samotnej možnosti existencie čistej, t. j. od všetkého obsahu oslobodenej, apriórnej logiky. Zdá sa, že uvedené skutočnosti svedčia skôr proti takejto možnosti. k čistej apriórnej logike, jedinej pre všetko poznanie, sa možno dopracovať leda ak v ideálnej abstrakcii, no sotva ju možno vyčerpávajúcim spôsobom sformulovať, a už tobôž jej dať podobu použiteľného kalkulu a zovrieť ju do raz a navždy stanovených pravidiel a schém. Tak každá oblasť ľudského poznania sa zdá mať svoju vlastnú logiku, ktorú nemožno do dôsledkov očistiť od nánosov jeho obsahu. Špeciálne teda nemožno prehliadať rozdiely medzi logikou prirodzeného jazyka, ktorá nie je celkom prostá sporov – a ani ju netreba a nemožno celkom ich zbaviť, keďže odráža často protirečivé stránky skutočnosti a myslenia, a formálnou matematickou logikou, ktorá si na jednej strane vynucuje isté obmedzenia (trebárs typovej povahy), aby sme v nej tak ľahko neupadli do formálnych sporov, no na druhej strane, bez postulovania istého minima axióm, ktorých prijatie nijako nemožno zdôvodniť na základe logiky bežného jazyka, nie je schopná zohrať úlohu základov matematiky.

Lež i za spomínanú cenu dosiahnuté oslobodenie od paradoxov zostalo bez záruky. Môžeme si síce byť istí, že spory v dôsledku autoreferencie a nepredikatívnych definícií sa v matematike založenej na teórii typov nevyskytnú, avšak logicistická téza už ostala príliš otrasená a jej zámery príliš neuspokojivo naplnené, aby sa v bezospornosť matematiky dalo veriť iba na základe viery v správnosť logiky. Gödelove výsledky z r. 1930 tieto pochybnosti potvrdili v miere prevyšujúcej všetky očakávania.

Potiaľto sa teda osudy Principia Mathematica zhodujú s osudmi axiomatickej teórie množín. No hlavným dôvodom, prečo sa teória typov, na rozdiel od teórie množín, nakoniec neuchytila, zostáva jej neprimeraná zložitosť a strnulosť, vyvolaná prísnou hierarchiou teórie typov, zbytočne a v neprimeranej miere stavajúcou do popredia štruktúru prítomnú v prirodzenom jazyku len čiastočne a implicitne. No teória množín má oproti teórii typov navyše tú výhodu, že v sebe implicitne obsahuje dokonca transfinitnú typovú hierarchiu. Túto možno v prípade potreby vyvolať pomocou typovej funkcie τ, ktorú sme zaviedli v predošlej kapitole v súvislosti s axiómou regularity. Pritom odpadá nevyhnutnosť rozlišovať medzi typom a jeho úrovňou. Podobne štruktúru rádov možno pre matematické teórie zachytiť pomocou ich modelov v teórii množín. Istú opatrnosť si vyžadujú modely teórie množín samotnej.

Obrazne povedané, je dobré vedieť, že v štáte je dobre fungujúca, spoľahlivá polícia, ktorá chráni životy, bezpečnosť a majetok občanov a bdie nad dodržiavaním zákonov. A čím je pritom nenápadnejšia, tým lepšie. No je veľmi nepríjemné, keď nás polícia sleduje na každom kroku a okato dáva svoju všadeprítomnosť najavo. Potom už ani nevieme, či si máme želať, aby fungovala bezchybne, alebo radšej menej poriadne a dôsledne.

Na veci už nič podstatného nemohli zmeniť ani neskoršie pokusy prekonať tieto nedostatky teórie typov, z ktorých najznámejším sú tzv. New Foundations navrhnuté W. V. O. Quinom, zbližujúce typový a množinový prístup a znenápadňujúce typovú hierarchiu zavedením tzv. stratifikovaných formúl. Matematika založená na teórii typov sa dnes pestuje takmer výlučne ako odvetvie filozofie matematiky a matematickej logiky (čo je napokon, hoc nie bez irónie, v zhode s pôvodným logicistickým zámerom). Samotnú matematiku však v podstate nezasahuje.

9. Intuicionizmus

Ako sme už spomínali, od čias antiky, cez celý stredovek a novovek až do vzniku teórie množín v druhej polovici 19. storočia, hoci v tejto otázke dochádzalo sústavne k rôznym sporom, ktoré sme si nemohli dovoliť bližšie sledovať, prevládajúcim poňatím nekonečna zostávalo nekonečno potenciálne. Až rozvoj teórie množín a výrazné úspechy množinovej matematiky zvrátili tento stav v prospech nekonečna aktuálneho. Zároveň sme sa pokúsili ukázať, že len čo si teória množín vytýčila skúmanie nekonečna za svoju prvoradú úlohu, nárokujúc si pritom status novovekej objektívnej vedy, aktualizácia nekonečna v jeho absolútnej podobe bola už predpojatá v tomto jej vedúcom zámere.

Ďalší rozvoj matematickej analýzy na množinovom základe, teoreticky završujúci predchádzajúce úspechy klasickej mechaniky, dal potom v súlade s vtedy panujúcim mechanistickým výkladom sveta pohotovo vzniknúť tiež dodatočnému výkladu ospravedlňujúcemu a zdôvodňujúcemu spomínanú aktualizáciu. Podľa tohto výkladu reálny fyzikálny priestor možno stotožniť s trojrozmerným euklidovským priestorom a štruktúru plynutia času so štruktúrou usporiadania geometrickej priamky. A napokon skúmanie oboch možno metódou súradníc previesť na skúmanie reálnych čísel. Teda aktuálne nekonečno ukryté v ideálnom kontinuu množiny reálnych čísel je reálne, priam fyzicky prítomné v štruktúre bodov priestoru a taktiež v štruktúre časových okamihov, čiže hneď v dvoch typoch kontinuí reálneho sveta. I keď presvedčením o bezpodmienečnej zhode reálneho a euklidovského priestoru trvale otriasli objavy geometrií neeuklidovských, neskoršie modely týchto geometrií v euklidovskom priestore vyňali spod akejkoľvek pochybnosti aspoň tézu o lokálne euklidovskom charaktere reálneho priestoru. Uvedený výklad času sa vtedy nepokúšal spochybniť nikto. Takže sa verilo, že absolútne aktuálne nekonečno, dokonca množinu mohutnosti $2^{\aleph_0}$, možno nájsť v ľubovoľne malom priestorovom i časovom intervale. Hoci do vzniku kvantovej mechaniky, ktorá mala tieto výlučne a priori podložené tézy postupne obrátiť celkom naruby, už nebolo až tak ďaleko.

I tak sa niet čomu diviť, že teóriu množín s jej koncepciou nekonečna neprijali všetci bezvýhradne, ale potenciálne nekonečno si medzi matematikmi aj naďalej zachovalo nemalý počet vplyvných stúpencov, ktorých práve skutočnosť, že sa takrečeno zo dňa na deň ocitli v menšine, primäla sformulovať svoje stanovisko o to vyhranenejšie a hájiť ho o to zápalistejšie. Vyústením tejto odozvy boli vystúpenia Luciena Egberta Jana Brouwera (1881 -1966), spadajúce do rokov 1907-1908 a sformovanie takzvanej intuicionistickej platformy.

Z filozofického dedičstva, na ktoré intuicionizmus nadviazal, treba spomenúť predovšetkým René Descarta (1596 -1650) a Blaise Pascala (1623 -1662), ktorí nad skúsenostné poznanie sprostredkované zmyslami stavali poznanie čisto rozumové, pozostávajúce jednak z dedukcie, ktorou sa rozum uvedomelo a krok za krokom dopracúva k novým poznatkom na základe predošlých, no najmä z *intuície*, ktorú si cenili najvyššie, chápanej ako rozumom nezdôvodnené, bezprostredne pravdivé, celostné uchopenie nejakej idey či súcna jediným vhľadom jasného rozumu, neponechávajúce najmenší priestor pochybnostiam a neistote. Podobný výklad intuície je ďalej rozvinutý v diele Immanuela Kanta (1724 -1804). No ešte markantnejšie sa Kantov vplyv prejavil pri intuicionistickom výklade času ako apriórnej formy nášho vnútorného rozumového nazerania seba samých i okolitého sveta. Na konkrétnej podobe intuicionistického výkladu idey trvania a jej prepojení s ideami sčítania a čísla však badať aj hlboké stopy začiatkom 20. storočia veľmi vplyvnej filozofickej koncepcie Henri Bergsona (1859 až 1941), zdôrazňujúcej navyše psychologickú aktivitu subjektu.

Najvýznamnejšími bezprostrednými predchodcami intuicionizmu na pôde matematiky boli Leopold Kronecker (1823 až 1891) a Henri Poincaré (1854 -1912), hoci každý z nich pristúpil ku kritike Cantorovej teórie množín a aktuálneho nekonečna v inom období a z iného stanoviska. Kronecker ešte v sedemdesiatych a osemdesiatych rokoch 19. storočia, v čase rozmachu Cantorových, Dedekindových a Weierstrassových tvorivých snáh hlásal, že ich základné pojmy sú len prázdne slová, ktoré nezodpovedajú nijakej skutočnosti a presne v duchu pytagoreizmu žiadal vybudovať matematiku založenú dôsledne len na pojme celého čísla. Poincaré vystúpil proti Cantorovej teórii množín, no rovnakou mierou i proti Russelovmu logicizmu, až v čase jej krízy, keď podobných kritických hlasov, pochopiteľne, pribúdalo. Za príčinu sporov v objavených paradoxoch považoval, popri už spomínaných nepredikatívnych definíciách, práve zavedenie aktuálneho nekonečna do matematiky a sám sa prikláňal k nekonečnu potenciálnemu. Pritom vyzdvihoval matematickú indukciu ako výraz nášho intuitívneho porozumenia pre nekonečné deje, základnú oporu a nástroj matematických úvah, ktorú nemožno previesť na nijaké jednoduchšie matematické ani logické princípy, a fakticky jedinú prípustnú matematickú metódu operovania s nekonečnom zároveň.

K niektorým intuicionistickým názorom mala tiež blízko, i keď v pomerne umiernenej podobe, francúzska škola predstavovaná najmä R. Bairom, E. Borelom a H. Lebesguom a s nimi sympatizujúca a spolupracujúca sovietska škola vedená N. N. Luzinom. Obe tieto školy inak veľmi podstatne a výrazne využívali metódy teórie množín v analýze, topológii, teórii funkcií, teórii miery atď., no Zermelov dôkaz možnosti dobre usporiadať kontinuum a niektoré ďalšie „nepríjemné” dôsledky axiómy výberu ich znepokojili natoľko, že vzniesli vážne výhrady proti tejto axióme a neefektívnym existenčným dôkazom vôbec.

Poznamenajme len na okraj, že keby axióma determinovanosti bola známa už v tom čase, je dosť možné, ba dokonca pravdepodobné, že spomínaní štyria veľkí matematici by jej asi dali pred axiómou výberu prednosť. Pomocou axiómy determinovanosti možno totiž vybudovať omnoho krajšiu, elegantnejšiu a vnútorne jednoliatejšiu deskriptívnu teóriu množín, v ktorej sa práve nemôžu vyskytnúť rôzne patologické (napr. nemerateľné) množiny reálnych čísel, za aké je zodpovedná axióma výberu.

No najostrejšej a najrozsiahlejšej, pritom však hlbokej a prenikavej kritike podrobil množinové i logicistické poňatie matematiky a taktiež koncepciu aktuálneho nekonečna Brouwer, ktorého tak právom považujeme za zakladateľa myšlienkového smeru v matematike nazývaného *intuicionizmus*. Jeho prvé vystúpenia z rokov 1907-8 postupne prerástli do nového vývojového prúdu v matematike, ktorý sa s takzvaným klasickým prúdom definitívne rozišiel. Z ďalších najvýznamnejších predstaviteľov tohto hnutia treba spomenúť aspoň Hermanna Weyla (1885 -1955) a Arenda Heytinga.

Podľa Brouwera aktuálne nekonečno je odťažitá fikcia, ktorá nezodpovedá nielen nijakému javu reálneho sveta, ale ani nijakej našej predstave, a jeho zavedením do matematiky sa táto veda dostáva do vleku mystiky. Tým však matematika stráca akúkoľvek intuitívnu názornosť, čo nutne vedie k zhubnému bujneniu formálnych metód, ktoré sa tak stávajú jediným bezpečným vodidlom v temnom labyrinte aktuálne nekonečných množín, neprístupnom nášmu nazeraniu ani predstavivosti.

Za jediný zdroj matematiky považuje Brouwer ľudský rozum; presnejšie, matematika je totožná s exaktnou zložkou nášho myslenia a žiadna iná veda, teda ani filozofia či logika, nemôže slúžiť na podopretie jej základných predpokladov. Jej jediným predpokladom je *racionálna intuícia*, ktorou s bezprostrednou jasnosťou a istotou nazeráme matematické idey, pojmy, tvrdenia a dôkazy. Zvláštnosťou rozumu umožňujúcou vznik matematiky je jeho schopnosť vnímať a rozlišovať dva po sebe nasledujúce časové okamihy ako dva rôzne okamihy. Abstrakciu tohto vedomého rozlišovacieho aktu môžeme v hĺbke svojej intuície podrobiť neohraničenému opakovaniu. To nám v konečnom dôsledku umožňuje generovať rad prirodzených čísel

a podložiť nimi ľubovoľné iné postupne krok za krokom plynúce deje, špeciálne, postupnosti rôznych matematických objektov. Snaha vyložiť prirodzené čísla pomocou nejakého množinového či logického výkladu je teda stavaním vecí na hlavu. Tie totiž v intuicionistickej matematike vystupujú ako čosi prvotné, odvodené len z nášho intuitívneho porozumenia času, ale aj naopak, rad prirodzených čísel sa stáva vzorom okamihov plynúceho času, vlastne akousi jeho vyprázdnenou formou.

Dôsledné trvanie na naznačenom výklade nám už samo zabraňuje vykladať nekonečno prítomné v obore prirodzených čísel ako zavŕšené, t. j. aktuálne. Niečo také by totiž predpokladalo paradoxnú aktualizáciu času, t. j. výklad, podľa ktorého časové okamihy, ktoré ešte len uplynú, existujú už teraz, teda budúcnosť existuje už v prítomnosti. To je však s našou intuíciou času v príkrom rozpore. Nie je síce ťažké predstaviť si nejaký dômyselný teologický výklad založený trebárs na úplnom predurčení, ktorým by sme vedeli i takúto aktualizáciu ospravedlniť. Práve od podobných výkladov však chcel Brouwer matematiku definitívne oslobodiť.

Skôr uvedený klasický výklad času a jeho intuicionistický náprotivok tak názorne demonštrujú, ako dve, v jednej genetickej línii príbuzné, apriórne koncepcie môžu postupne dospieť k pomerne ľubovoľným vzájomne protichodným záverom.

V intuicionistickom poňatí tak obor prirodzených čísel zasa raz prestáva byť množinou a nekonečno v ňom prítomné je opäť len nekonečno potenciálne. To znamená, že prirodzených čísel máme vždy vytvorený len konečný počet, no v prípade potreby si zakaždým môžeme vytvoriť nové prirodzené čísla, teda môžeme ich mať väčší konečný počet. V ktorejkoľvek chvíli tak tie prirodzené čísla, ktoré sme už uskutočnili, predstavujú len nepatrný zlomok tých, ktoré vôbec možno uskutočniť, no vôbec všetky prirodzené čísla nijakým zavŕšeným tvorivým aktom, ani v predstave uskutočniť nemožno.

V dôsledku naznačeného výkladu nekonečno v intuicionistickej matematike stráca svoj objektívny, presnejšie objektový ráz; nevzťahuje sa totiž k nijakému zavŕšenému objektu, ale vyjadruje vlastnosť niektorých dejov – ich neohraničené, nezavŕšené, postupné plynutie krok za krokom. Tým sa intuicionizmus odpútava nielen od Cantorovej teórie množín a jej vedúcich zámerov, ale dostáva sa ešte pred Bolzanov výklad nekonečna až k najvlastnejšej podobe tohto javu, ktorou asi skôr než nekonečné množiny budú neohraničené deje, i keď nie len nutne odohrávajúce sa krok za krokom.

No Brouwer sa neobmedzil len na kritiku aktuálneho nekonečna a vyloženie svojej koncepcie nekonečna potenciálneho, čo bol, akokoľvek významný, jednako iba príspevok do starej diskusie o už tradične sporných otázkach. Omnoho väčší rozruch spôsobila jeho kritika klasickej logiky, ktorej pravidlá sa nám tradíciou dochovali v podstate nezmenené ešte od Aristotela a viera v ich absolútnu správnosť a univerzálnu platnosť, nezávisle od predmetu a obsahu príslušných úsudkov, bola po celé to dlhé obdobie jedným z najpevnejších, zdanlivo neotrasiteľných pilierov západného myslenia. V dôsledku šokujúceho účinku tejto kritiky, ktorý prekryl mnohé podstatné súvislosti, sa dokonca podnes možno u mnohých autorov stretnúť s hrubo zjednodušeným výkladom intuicionizmu, redukujúcim ho len na revíziu logiky.

Podľa intuicionistov klasická logika bola vyabstrahovaná z prirodzeného ľudského jazyka, ktorý odrážal každodennú ľudskú skúsenosť zahŕňajúcu len konečné zoskupenia objektov. Postupne ľudstvo na ohraničenia dané jej pôvodom zabudlo, prehlásilo ju za niečo prvotné, a priori platné, a začalo ju bez akéhokoľvek oprávnenia používať i v oblastiach, na ktoré sa jej platnosť nevzťahuje, špeciálne v matematike nekonečných oborov objektov.

Používanie klasickej logiky v plnom rozsahu na aktuálne nekonečné množiny je tak len prenesením ďalšieho z atribútov konečna na nekonečno a je už predpojaté v samotnej jeho aktualizácii. Naopak, dôsledný výklad nekonečna ako potenciálneho si už sám vynucuje starostlivé prehodnotenie princípov klasickej logiky prv, než sa pokúsime rozšíriť sféru ich platnosti aj na nekonečné obory objektov.

Skôr, než tu uvedieme niektoré klasické logické zákony, ktoré v tejto skúške neobstáli, je potrebné na chvíľu sa pristaviť pri Brouwerovom hodnotení vzťahu medzi jazykom, logikou, myslením a matematikou. Matematické myslenie prebieha v hlbinách rozumu a ako také nemá jazykový charakter. Jazyk – či už prirodzený alebo symbolický – slúži len na komunikáciu rôznych, napríklad matematických poznatkov, no sám nijako nie je schopný vyjadriť celé ich bohatstvo. Logika, ktorá zachytáva štruktúru jazyka, no nie skutočného myslenia, tak zohráva úlohu len akéhosi druhotného nástroja sprostredkúvajúceho vzťah medzi jazykovými úvahami a im zodpovedajúcimi transformáciami matematického textu, no nie úlohu nástroja matematického myslenia samotného.

Teda základná logicistická téza dospieva v intuicionizme k svojmu obráteniu: nie matematika je časťou logiky, ale logika, alebo aspoň matematická logika, je časťou matematiky a matematika tiež rozhodujúcou mierou určuje charakter jej zákonov. Z toho dôvodu akékoľvek pokusy odvodiť matematiku z logiky, o čo sa pokúšal logicizmus, či z nejakého vhodného axiomatického systému, o čo sa zase pokúšal formalizmus, a tak zaručiť jej bezospornosť, sú dokonale pomýlené. Bezospornosť je dôsledkom správnych úvah, a o správnosti úvah usudzujeme intuitívne, či, lepšie povedané, intuitívne ju nahliadame. Paradoxy teórie množín preto nie sú v prvom rade logické spory, ale dôsledky zavedenia intuitívne nepodložených pojmov – aktuálne nekonečných množín – do matematiky. Spomínané spory nám tak absurdnosť nekonečných množín len odhaľujú v celej jej nahote.

Klasická logika, súc takto vykázaná do „patričných medzí”, je i v intuicionistickej matematike v plnom rozsahu použiteľná na aktualizované obory objektov, ktoré však tu sú len konečné. Po ďalšej analýze síce intuicionizmus priznáva použiteľnosť väčšiny jej princípov aj na nekonečné, a tým neaktualizované obory, neprestáva však zdôrazňovať, že logika je len *negatívnym* kritériom pravdy. Teda napríklad, ak predpoklad o existencii nejakého objektu daných vlastností vedie k sporu, taký objekt nemôže existovať. No naopak, len na základe logického sporu, odvodeného z predpokladu jeho neexistencie, ešte nemožno usudzovať na existenciu nejakého objektu. Podobne, aby sme dokázali tvrdenie $\varphi \vee \psi$, musíme skutočne dokázať tvrdenie φ alebo dokázať tvrdenie ψ, teda musíme nielen vedieť, že aspoň jedno z nich je pravdivé, ale aj menovite ktoré to je. Nestačí dokázať alternatívu $\varphi \vee \psi$ nejakou okľukou, napríklad tak, že dokážeme implikáciu $\neg\varphi \Rightarrow \psi$. Potom síce vieme, že obe tvrdenia φ, ψ nemôžu byť súčasne nepravdivé, no ktoré z nich naozaj platí, stále nevieme.

Pokúsime sa teraz na príklade ilustrovať, že nehotové, len postupne sa dotvárajúce svety majú svoju vlastnú logiku, nie nevyhnutne totožnú s klasickou. Poprosíme čitateľa, aby si predstavil nejaký, inak hocijaký, dom. Počkáme, kým si ho predstaví a položíme mu otázku: „Je v tom dome domovník?” Ak si čitateľ výslovne predstavil nejaký dom a v ňom domovníka, môže spokojne odpovedať „áno”. Ak si výslovne predstavil nejaký dom bez domovníka, môže odvetiť „nie”. V každom inom prípade, t. j. ak si nijakého domovníka, ani „domovníka ako takého” vo vzťahu k svojmu domu nepredstavoval, (a asi sa príliš nezmýlime, keď si dovolíme predpokladať, že to je práve prípad väčšiny našich čitateľov), nemôže spokojne odvetiť ani tak, ani tak. Skutočne v takom dome domovník „ani bol, ani nebol”. Z hľadiska klasickej logiky to však nie je možné, tá pripúšťa len dve možnosti – buď tam bol, alebo tam nebol – a nič tretie. Niektorí čitatelia síce môžu ešte dodatočne na základe charakteru príslušného domu usúdiť, že tam domovník byť musel, iní zasa, že tam byť nemohol; no v takom prípade sotva môžu zaručiť, že bol práve vtedy doma, prípadne, že v ich dome nebol práve vtedy, trebárs na návšteve, domovník z nejakého iného domu. Podstatne zaujímavejšie je, že každý si teraz, t. j. *dodatočne*, môže svoju predstavu domu dotvoriť podľa toho, či v ňom chce alebo nechce mať domovníka.

Logický zákon, ktorý sme sa v našom príklade snažili spochybniť a ktorý vo vzťahu k nekonečným oborom objektov Brouwer skutočne podrobil kritike, sa nazýva *zákon vylúčenia tretieho*. Podľa tohto zákona pre ľubovoľné tvrdenie φ, tvrdenie $\varphi \vee \neg\varphi$ je pravdivé, nezávisle od obsahu i od pravdivosti či nepravdivosti tvrdenia φ a našich znalostiach o nich. V intuicionistickom poňatí sa však na tvrdenie $\varphi \vee \neg\varphi$ vzťahuje všetko to, čo sme už povedali o alternatíve dvoch tvrdení.

Zákon vylúčenia tretieho, prípadne s ním rovnocenný *zákon dvojitej negácie*, $\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi$, sa v matematike často používa pri dôkazoch sporom, najmä pri takzvaných nepriamych neefektívnych existenčných dôkazoch. Na dôkaz existencie nejakého objektu x s danou vlastnosťou $\varphi(x)$, t. j. na dôkaz tvrdenia $(\exists x)\,\varphi(x)$, totiž v klasickej matematike stačí dokázať, že predpoklad , podľa ktorého žiadny objekt x nemá vlastnosť $\varphi(x)$, vedie k sporu. Takéto dôkazy, podobne ako neefektívne dôkazy existencie matematických objektov zaručených len axiómou výberu, však intuicionizmus odmieta. Poznamenajme, že obe tieto otázky súvisia ešte omnoho užšie, než by sa na prvý pohľad mohlo zdať. V r. 1975 totiž R. Diaconescu publikoval výsledok, dokázaný metódami teórie kategórií, podľa ktorého v teórii množín s axiómou výberu je už púhymi prostriedkami intuicionistickej logiky dokázateľný aj zákon vylúčenia tretieho.

Keď sme už raz odbočili, naskytá sa nám vhodná príležitosť poznamenať, že nahradenie axiómy výberu axiómou determinovanosti znamená odklon od klasickej teórie množín v smere príkro a načisto protichodnom intuicionizmu. Zjednodušene povedané, táto axióma pre ľubovoľný vzťah $\varphi(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$, ukazujúci sa na nekonečných postupnostiach objektov, postuluje pravdivosť tvrdenia

$$(\exists x_0)\,(\forall x_1)\,(\exists x_2)\,(\forall x_3)\ldots\varphi(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots)\vee$$
$$\vee\,(\forall x_0)\,(\exists x_1)\,(\forall x_2)\,(\exists x_3)\ldots\neg\varphi(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots),$$

teda rozširuje platnosť zákona vylúčenia tretieho zároveň s pravidlom o negácii kvantifikovaných formúl aj na sféru logiky istých nekonečne dlhých formúl.

Jediným prípustným dôkazom existenčného tvrdenia v intuicionistickej matematike je faktické zostrojenie hľadaného objektu alebo aspoň intuitívne jasný návod na jeho konštrukciu. Intuicionistická matematika má teda *konštruktívny* charakter. Avšak otázku, aké konštrukcie sú intuitívne prípustné, necháva tento smer nezodpovedanú. Zo samej povahy veci totiž vyplýva, že akékoľvek presné pojmové vymedzenie významu slov „intuitívne jasný”, ak navyše má byť samo intuitívne jasné, je jeho neodôvodneným zúžením.

Svet intuicionistickej matematiky je teda v stave neustáleho vznikania, je otvorený a nezavŕšený, podobne ako svet našich predstáv. Objekty v ňom už vytvorené vstupujú do rôznych vzťahov i s objektmi novovznikajúcimi, čím sa mení ich postavenie v tomto svete, a tým aj ich vlastnosti. Skrytý predpoklad klasickej logiky zakladajúci zákon vylúčenia tretieho, podľa ktorého ľubovoľný objekt ostro rozdeľuje všetky vlastnosti, ktoré sa na ňom môžu ukázať, na dve skupiny – na tie, ktoré má, a tie, ktoré nemá – tu teda nie je splnený. Pre istotu ešte poznamenajme, že klasická objektívna veda nachádza tento predpoklad splnený v reálnom svete len pod vplyvom jeho mechanistického výkladu. Na nebezpečenstvo skryté v úvahách o „všetkých vlastnostiach” sme už upozornili v súvislosti s paradoxmi Richarda a Berryho.

Uveďme ešte jeden, tentoraz matematický príklad, akých bol na osvetlenie intuicionistického stanoviska vymyslený celý rad. Všetky sledujú spoločnú schému – zakladajú sa na nejakom nevyriešenom matematickom probléme. Začnime písať desatinný rozvoj čísla π = 3,141... a pod ním desatinný rozvoj ρ = 0,333..., ktorý ukončíme, len čo sa v rozvoji čísla π po prvýkrát objaví postupnosť čísel 0123456789. Ak teda cifra

9 z prvého výskytu takejto postupnosti je k-tym znakom za desatinnou čiarkou, tak $\rho = (10^k - 1)/3.10^k$. Ak sa takáto skupina cifier v rozvoji čísla π neobjaví, tak $\rho = 0,\overline{333}$, t. j. ρ má nekonečný desatinný rozvoj. Klasicky ľahko dokážeme, že ρ je racionálne číslo. Keby totiž nebolo, tak pre žiadne k by nemohlo byť $\rho = (10^k - 1)/3.10^k$ a postupnosť 0123456789 by sa nikdy neobjavila v π. Potom je však $\rho = 1/3$, čo je spor. Jednako, v intuicionistickom poňatí oprávnene tvrdiť, že ρ je racionálne číslo, predpokladá vypočítať jeho čitateľa a menovateľa, teda ukázať menovite ktorému z čísel 1/3; 0,3; 0,33; 0,333 atď. sa ρ rovná Na to by sme však museli nájsť prvý výskyt spomínanej skupiny cifier v rozvoji π, alebo dokázať, že takýto výskyt neexistuje. Ani jedno ani druhé sa však zatiaľ nikomu nepodarilo. Pritom si ešte všimnime, len aby sme si uvedomili, že s prípadným upresnením pojmu konštruktívnosti to nebude také jednoduché, že naše poznatky o čísle π nám umožňujú vypočítať číslo ρ s presnosťou na ľubovoľný vopred daný počet desatinných miest.

Celkom na okraj ešte poznamenajme, že už len samotná intuicionistická revízia logiky sa na prvý pohľad zdá schopná preklenúť aspoň bezprostredné príznaky krízy teórie množín spočívajúce v niektorých zo skôr uvedených paradoxov. Napríklad v Russellovom paradoxe sme totiž logický spor odvodili až s použitím zákona vylúčenia tretieho. Ak tento logický zákon neprijmeme, k žiadnym sporom by dôjsť nemuselo. No nie je to tak. Ako sa vyjasnilo krátko po uverejnení Heytingovho systému intuicionistickej logiky, ku ktorému sa ešte dostaneme, z tvrdení tvaru $\varphi \Leftrightarrow \neg\varphi$, a k takému dospejeme i v Russellovom paradoxe, už môžno odvodiť spor tvaru $\varphi \,\&\, \neg\varphi$ aj prostriedkami intuicionistickej logiky, bez použitia zákona

vylúčenia tretieho. Ako sme už naznačili, táto a celý rad podobných otázok je však intuicionizmu srdečne ľahostajných.

V intuicionistickom poňatí matematiky stráca totiž zmysel nielen rozhodujúca časť teórie množín, napríklad nekonečné kardinály a ordinály, no i značná časť tradičných matematických disciplín, ako napríklad klasická analýza, sa ocitá v nezávideniahodnom postavení: musia radikálne zrevidovať svoje metódy a mnohé svoje výsledky dokázať nanovo konštruktívne, prípadne zúžiť oblasť ich platnosti, ba dokonca sa ich zrieknuť. K základným výsledkom klasickej analýzy, ktoré neprejdú týmto sitom, patria napríklad Bolzanova-Weierstrassova veta o hromadnom bode nekonečnej ohraničenej množiny reálnych čísel, či veta o supreme a mnoho ďalších, medzi nimi i Brouwerova veta o pevnom bode.

Od kritiky množinovej matematiky a klasickej logiky intuicionisti postupne prešli k rozpracovaniu svojej vlastnej pozitívnej koncepcie matematiky. Jedným z hlavných problémov, s ktorým sa pritom museli vysporiadať, bolo vypracovať v rámci svojou povahou prevažne diskrétneho intuicionistického poňatia matematický výklad kontinua, ktoré nie je javom o nič menej intuitívne jasným a bezprostredne rozumovo uchopiteľným ako rad prirodzených čísel. Intuicionistická koncepcia však pri zvolenom prístupe neumožňuje aktualizovať nielen obor všetkých reálnych čísel ako matematický model kontinua, no vo všeobecnosti ani jednotlivé reálne čísla, ktoré sú, z čiste formálneho hľadiska podobne ako pri konštrukcii Cantorovej, zadané niektorými „voľne vznikajúcimi”, čiže konštruktívne popísanými, no nezavršujúcimi sa postupnosťami čísel racionálnych. Práve táto neuchopiteľnosť jednotlivých reálnych čísel ako hotových objektov si vynucuje množstvo umelých náhražiek formálneho charakteru, ktoré celú vec značne komplikujú a už tobôž nepridávajú intuicionistickému kontinuu na intuitívnej názornosti. A tak výsledok týchto snáh sotva možno nazvať všeobecne uspokojivým. Napokon viaceré znamenité Brouwerove práce z topológie a Weylove z matematickej fyziky, ktoré pevne spočívajú na pôde klasickej matematiky, i keď nie priamo teórie množín, a sú na míle vzdialené intuicionistickému poňatiu, to tiež nepriamo dosvedčujú.

Bližšie oboznámenie so samotnou intuicionistickou matematikou a ocenenie prínosu jednotlivých autorov k jej rozvoju už presahuje rámec našich úvah, takže sa obmedzíme len na niekoľko veľmi všeobecných poznámok. Táto matematika je svojím spôsobom veľmi zaujímavá a osobitá, pričom jej výsledky miestami priam protirečia svojim klasickým náprotivkom, čo je občas príjemným, no asi jediným osviežením pri jej neľahkom a nie príliš záživnom štúdiu. V nijakom prípade však nemôže s klasickou matematikou súťažiť v bohatstve a pestrosti jej sveta, v rozmanitosti používaných metód ani v sile aplikácií. Tie posledné totiž intuicionistická matematika zatiaľ v podstate nenašla a samotní jej predstavitelia sa v tomto smere i do budúcnosti vyslovujú skepticky.

V r. 1930 uverejnil Heyting formálny logický systém, v ktorom zachytil v axiomatickom tvare základný fragment intuicionistickej logiky. Z hľadiska intuicionizmu, ktorý nepripúšťa možnosť stanoviť s konečnou platnosťou všetky logické princípy vyrastajúce z pôdy matematiky, ide o výsledok vyslovene okrajový a, dôsledne vzaté, vlastne neželaný. No skutočnosť, že všetky doposiaľ v intuicionizme používané logické

zákony možno v Heytingovom systéme odvodiť, uvedenú tézu dosť problematizuje. Navyše Heytingov systém otvoril možnosť modelovať intuicionistickú logiku pomocou takzvaných Heytingových algebier, ktoré sú prirodzeným zovšeobecnením Boolových algebier. To vo svojom dôsledku umožňuje modelovať v teórii množín aj intuicionistickú matematiku. Klasická matematika sa tak ukázala dosť bohatou na to, aby do seba pojala, hoci len v sprostredkovanej modelovej a nevyhnutne skreslenej podobe, aj matematiku intuicionistickú, presnejšie jej formálnu kostru.

Ako oveľa väčšia irónia osudu než púha formalizácia intuicionistickej logiky však vystúpila tá skutočnosť, že intuicionistická matematika sa v konečnom dôsledku ukázala intuitívne oveľa menej názornou než klasická a taktiež ťažkopádnosťou, zložitosťou a hojnosťou výskytu svojich formálnych metód, ktorým sa nedokázala vyhnúť, ju ďaleko prekonala. Z tohto pohľadu sa intuicionizmus vyšplhal do približne rovnakých výšav ako na teórii typov založený logicizmus – ibaže na iný kopec.

Za takýchto okolností bolo celkom prirodzené, že väčšina matematikov považovala drastické zúženie sféry matematického skúmania a jeho metód, požadované intuicionizmom, za privysokú cenu za to, čo toto poňatie mohlo ponúknuť, a zaujala k nemu odmietavé stanovisko. Okrem vecných a podložených výhrad, ku ktorým sa ešte vrátime, však hlavné dôvody nechuti, ba priam popudenosti voči intuicionizmu vyvierali z hlbokého podvedomia jeho odporcov, a to, s čím skutočne vstúpili do diskusie, boli často len pokusy toto svoje vopred zaujaté negatívne stanovisko racionalizovať a teoreticky zdôvodniť. Už spomínaná strata zmyslu veľkej časti klasickej matematiky vo svetle intuicionizmu totiž spôsobila, že mnohí významní matematici, ktorí do nej výrazne prispeli, sa cítili ohrození a osobne napadnutí a intuicionistickú kritiku klasického poňatia považovali za zneváženie svojej vlastnej práce. Navyše intuicionizmus v istom zmysle ruší predmet matematiky tým, že vystupuje proti skôr uvedenému objektivizačnému zámeru teórie množín, čím ešte umocňuje všeobecné pobúrenie matematickej obce. Kým napríklad klasická aritmetika je náukou o množine prirodzených čísel, intuicionistická len o ich neaktualizovanom obore, čo nie je plnohodnotný objekt v zmysle novovekej objektívnej vedy. V klasickom výklade tohto posunu sa tak intuicionistická aritmetika stáva náukou o jednotlivých prirodzených číslach, daných len ako isté rozumové konštrukcie, teda spočíva na čiste subjektívnych základoch. Krátko povedané, v intuicionistickom poňatí hrozí matematike, že stratí status novovekej objektívnej vedy.

Ak ponecháme stranou pomaly notoricky známe výhrady voči kantovskej apriórnej koncepcii priestoru a času, tak to, čo vzbudzuje na intuicionistickom poňatí najväčšie rozpaky, je otázka oprávnenosti stanovenia predmetu matematiky len na základe neumelého, odborne psychologicky nepodloženého sebapozorovania niekoľkých, čo ako vynikajúcich matematikov. Brouwer a po ňom Weyl a Heyting v podstate ľubovoľným spôsobom vypichli v matematickom myslení niektoré dôležité momenty charakteru intuitívne jasných rozumových konštrukcií, no otázkou, či sa tým matematické myslenie, a už vôbec ľudská intelektuálna činnosť, naozaj plne vyčerpáva, si už príliš nelámali hlavu. Naopak, novšie psychologické výskumy dokonca práve nasvedčujú tomu, že nie všetky oblasti ľudskej

psychiky všeobecne – a myslenia zvlášť – sú prístupné sebapozorovaniu a introspekcii. Navonok tak východiskové tézy intuicionizmu pôsobia dogmaticky a racionálna intuícia v nich vystupujúca postupne nadobúda čoraz mystickejší charakter. V tomto zmysle teda intuicionizmus iba nahradil mystiku aktuálneho nekonečna mystikou intuície. Potom je však už načisto otázne a nejasné, prečo má práve matematika tak tvrdošijne trvať na bezprostrednej intuitívnej názornosti všetkých svojich pojmov v miere, v akej to nečiní napríklad ani fyzika, ktorá sa v porovnaní s matematikou predsa len oveľa bezprostrednejšie vzťahuje k reálnemu svetu než k jeho ideálnym formám. Teda špeciálne, užitočnosť abstrakcie aktuálneho nekonečna by mala dostatočne ospravedlňovať zavedenie ideálnych nekonečných množín.

Taktiež Brouwerov výklad vzťahu myslenia a jazyka je značne predpojatý a jednostranný. Hoci jemnosť a zložitosť tejto otázky nám ju nedovoľujú na tomto mieste dostatočne posúdiť, keďže v jej riešeniach podnes nezavládla názorová zhoda, domnievame sa, že myslenie sa myslením v pojmoch nevyčerpáva, teda má i mimojazykovú dimenziu. Potiaľ možno s Brouwerom čiastočne súhlasiť. Na druhej strane ,však práve jazyková dimenzia je, ak aj nie najdôležitejšou, tak istotne aspoň jednou z najdôležitejších zložiek myslenia, ktoré sa predsa len v nezanedbateľnej miere odohráva v pojmoch či už bežného, alebo v prípade, o ktorý nám najväčšmi ide, tiež nejakého matematického jazyka. A popri apriórnych danostiach nášho vedomia predchádzajúcich každú skúsenosť, ktorých charakter je vôbec problematický, v ňom nemenšiu úlohu zohrávajú i zmyslové predstavy a v praktickej činnosti osvojená skúsenosť. Z toho dôvodu sa v intuicionizme prijaté ostré oddelenie myslenia od jazyka a degradácia posledného výlučne na prostriedok nedokonalej komunikácie javí ako hlboko metafyzické a odňatie logiky mysleniu a jej prisúdenie jedine jazyku doslova nezmyselné.

Ak sa teraz vrátime k intuicionistickej kritike klasickej logiky a pripomenieme si obsah pojmu „prirodzené nekonečno" v jeho súvislosti s obzorom, tak tvrdenie, že ľudstvo má v bežnom živote do činenia len s konečnými zoskupeniami objektov, musíme jednoznačne odmietnuť. Tento omyl je dôsledkom absolutizácie nekonečna (koncepcie, ktorú intuicionizmus nijako nespochybnil a možnosť iného výkladu si neuvedomil), na čom nič nemení ani jeho obnovený výklad v potenciálnej podobe. Práve naopak, ľudstvo neustále upieralo pohľad k obzoru a usilovalo sa ho oddialiť či prekročiť. V dôsledku toho ľudské myslenie a jazyk, a ich prostredníctvom aj logika, do seba zrejme pojali i mnohé rysy *prirodzenej* nekonečnosti sveta. Na druhej strane pravdou ostáva, že klasická logika vďaka svojej strnulej statickej podobe onen dynamický rozmer prirodzeného nekonečna úplne zastrela. I keď sa intuicionizmu nepodarilo túto medzeru uspokojivo zaplniť, predsa len na ňu nástojčivo poukázal.

Veď koniec koncov i v bežnom živote často uvažujeme „intuicionisticky". Totiž v prípade, keď naše poznanie nejakého javu nie je dostatočne úplné, takže ohľadom niektorej hypotézy máme k dispozícii len nejaké argumenty „pre" a iné „proti". I keď sa nám podarí jednu z dvoch skupín argumentov vyvrátiť, jednako sa asi budeme zdráhať za takejto neurčitosti vyniesť konečný súd podopretý len zákonom vylúčenia tretieho. Ešte by sa totiž mohli objaviť argumenty nové, ďalšie. S tým súvisiacu interpretáciu intuicionistickej logiky na pôde matematiky ako logiky riešenia problémov navrhol N. N. Kolmogorov v r. 1932.

Jednako však zrieknutie sa princípu vylúčenia tretieho v oblasti čistej matematiky, ktorej ideálne objekty sú vymedzené výlučne definitoricky pomocou matematických pojmov, je významným ústupkom agnosticizmu, ktorý matematiku oberá o slobodu tvoriť svoje objekty v čistej idealite a umiestňuje ich do akéhosi nepreniknuteľného pološera. Inak povedané, odmietnutím zákona vylúčenia tretieho vlastne postulujeme, že matematické objekty sa nám v tom okamihu, ako ich definujeme, vymknú z rúk. Uvidíme, že i na tom čosi bude, čo je však o dôvod menej podobné veci postulovať.

Nespornou zásluhou intuicionizmu však zostáva dôkladné prejasnenie celej logiky nastolením otázky o univerzálnej platnosti klasickej logiky a poukázaním na okruhy javov i v samotnej matematike, kde už nie je v plnom rozsahu použiteľná, a ktoré predtým akosi nikto nechcel brať na vedomie.

V snahe prekonať niektoré nedôslednosti intuicionizmu a zbaviť sa jeho psychologizmu a mystiky, najmä precizáciou pojmu matematickej konštrukcie, nadviazalo na intuicionistické tradície viacero matematických smerov, súhrnne označovaných ako smery *konštruktivistické*. Tieto smery sú vecne omnoho solídnejšie podložené a zďaleka natoľko nevybočujú z rámca klasickej objektívnej vedy. Zároveň z nich vyprchala akási uhrančivá príťažlivosť, akou sa vyznačovala aspoň filozofia intuicionizmu, i keď už menej jeho samotná matematika. Ani konštruktivistická matematika sa však nejakou zvláštnou príťažlivosťou a už tobôž aplikovateľnosťou (ktorú, aspoň na základe jej pôvodných zámerov, by bolo na mieste očakávať) nevyznačuje, a ani jej poprední predstavitelia sa príliš nesnažia niečo také predstierať. Na druhej strane za intuicionistickou matematikou, do ktorej vnáša mnohé modifikácie a upresnenia, nijako nezaostáva v pestovaní rozvetveného formálneho aparátu.

U nás najznámejší z konštruktivistických smerov predstavuje takzvaná Leningradská škola založená Andrejom Andrejevičom Markovom (1903-1979) na prelome 40. a 50. rokov, ktorá sa však popri Brouwerovi rovným dielom hlási k odkazu Hilbertovmu. Sovietsky konštruktivizmus chápe matematické potenciálne nekonečno ako abstrakciu potenciálnej uskutočniteľnosti matematickej konštrukcie, precizovanej pomocou presne definovaného pojmu normálneho algoritmu. Tento smer teda študuje algoritmické deje na prirodzených číslach, stotožnených so slovami nejakej jednoznakovej abecedy, prípadne na nejakých všeobecnejších syntaktických objektoch. Tieto deje chápe ako modely reálnych výpočtov, pričom abstrahuje od reálnych ohraničení daných trvaním a rozsahom výpočtu, kapacitou výpočtového zariadenia a podobne. Logika, ktorú konštruktivizmus používa, zodpovedá predmetu jeho skúmania a až na niekoľko jemnejších odtienkov, hlavne postulovanie platnosti zákona vylúčenia tretieho pre istý typ tvrdení o aplikovateľnosti algoritmov na vstupné údaje, je to v podstate logika intuicionistická.

Rozvoj konštruktivizmu definitívne ukázal, že konštruktívna matematika je predovšetkým jednou z rovnoprávnych matematických disciplín, no jej špecifický charakter a značne úzky rámec jej vytvárajú len mizivé predpoklady zohrať úlohu uspokojivých základov celej, čo ako výrazne okliešenej, matematiky.

Intuicionizmu, ani naň nadväzujúcim konštruktivistickým smerom sa nepodarilo vytvoriť novú, všeobecne nasledovaniahodnú koncepciu matematiky, ktorá by klasickej množinovej koncepcii mohla úspešne konkurovať. Ich prvoradou zásluhou teda nie je ani tak to, že by snáď boli ukázali, *ako* robiť matematiku *inak*, ale to, že ukázali, že ju vôbec *možno* robiť *inak*. Pritom nastolili celý rad otázok presahujúcich sféru kompetencie samotnej matematiky smerom k všeobecnejším polohám, ktoré i klasickú matematiku donútili hlbšie sa zamyslieť nad vlastnými princípmi, a ukázali obmedzenosť rámca klasickej novovekej objektívnej vedy, čím spochybnili jeho bezpodmienečnú záväznosť a otvorili nové obzory vedúce k jeho prekonaniu.

10. Formalizmus a Hilbertov program

Po Brouwerovej kritike klasického poňatia matematiky a po sformovaní intuicionistickej platformy už nešlo len o prekonanie krízy teórie množín a na nej založenej matematiky vyvolanej objavením paradoxov. Kríza množinovej matematiky sa vo svetle tejto kritiky ukázala príliš hlbokou na to, aby sa v otázke nastolenej na pretras dňa mohlo rozhodovať o niečom menšom než o osude celého klasického poňatia, presnejšie, pretože nijaká iná alternatíva nebola vtedy poruke, medzi ním a poňatím intuicionistickým. Samozrejme, ústrednou témou celého sporu stále ostával problém dvoch rôznych spôsobov chápania matematického nekonečna.

Na ťažkú a nevďačnú úlohu obhájiť klasickú matematiku v tomto spore a potlačiť Brouwerom vedenú vzburu, hroziacu zrúcaním jej majestátnej budovy, sa pod heslom „nikto nás nemôže vyhnať z raja vytvoreného pre nás Cantorom”, podujal David Hilbert (1862 -1943), vari najvýznamnejší a najuznávanejší matematik 20. storočia. Hilbert si bol vedomý

svojho postavenia na čele svetovej matematickej obce a spomínanú úlohu, hoci ho odvádzala od práce na iných, preňho zaujímavejších problémov, chápal ako svoju povinnosť voči nej a milovanej vede. Pritom sa mohol oprieť o spoluprácu takých matematikov ako Wilhelm Ackermann, Paul Bernays, Jacques Herbrand, Johann von Neumann, Moises Presburger a niekoľko ďalších.

Hilbert výrazne tvorivo zasiahol do skoro všetkých oblastí vtedajšej matematiky a prispel k vzniku niektorých nových, no neustále sa venoval aj fyzike, z ktorej čerpal nemálo podnetov. Ešte začiatkom dvadsiatych rokov viedol v Göttingene spolu s Maxom Bornom a Jamesom Franckom seminár „o vlastnostiach matérie”, ktorý možno považovať za jedno z rodísk kvantovej mechaniky. Dokonca samotný termín „kvantová mechanika” vznikol skutočne na ňom. Z tohto seminára vyšli aj Werner Heisenberg a Wolfgang Pauli. Ba dochovala sa i historka, podľa ktorej Born a Heisenberg prepásli príležitosť objaviť vlnový formalizmus kvantovej mechaniky pol roka pred Erwinom Schrödingerom, len zato, že nevenovali dostatočnú pozornosť Hilbertovej dobrej rade ohľadne ich maticového formalizmu.

Zdá sa, že práve atmosféra rodiacej sa kvantovej mechaniky, od základu rúcajúcej tradičné, vžité predstavy o mikroštruktúre hmoty, priestoru a času, a tým zodpovednej za zásadný obrat v názoroch na úlohu matematického popisu reality pri výstavbe fyzikálnych teórii, mala spolu s novopozitivistickými koncepciami vedy, natoľko rozšírenými na pôde vtedajšej fyziky, a logickým pozitivizmom rozhodujúci vplyv na utváranie Hilbertových názorov. Na druhej strane však treba kvôli úplnosti poznamenať, že dôsledky prevratných objavov kvantovej mechaniky, spočívajúce v posune chápania kauzality smerom od mechanistického determinizmu k náhodnosti a nemožnosti obísť pravdepodobnostný opis niektorých javov, sa v Hilbertovej koncepcii matematiky priamo neodrazili.

Na prípade kvantovej mechaniky sa totiž definitívne vyjasnilo, že rôzne fyzikálne pojmy zodpovedajú skôr našim idealizovaným predstavám o fyzikálnych javoch, než týmto javom samotným, a to tým väčšmi, čím menej sú ony prístupné našej skúsenosti, no pozorovať niektoré ich stránky prostredníctvom meracích prístrojov môžeme len oddelene. Navyše spôsob, akým sa realizujú súvislosti medzi niektorými fyzikálnymi javmi, nemusí nutne zodpovedať spôsobu, akým dávame do súvislosti im prislúchajúce fyzikálne pojmy v nejakej teórii. Teória si musí nájsť svoju vlastnú cestu, ktorou nastolí vlastnú súvislosť. Pritom je často nevyhnutné vytvoriť nové ideálne pojmy, ktoré už prípadne vôbec nemožno interpretovať na úrovni javov fyzikálnej reality. Takáto fyzikálna teória teda nutne obsahuje pojmy a matematický popis vzťahov medzi nimi, ktoré vypovedajú o realite skôr metaforicky, než by ju „bezprostredne" zobrazovali.

Prípady, keď vytvorenie takýchto ideálnych pojmov motivované vnútornými potrebami teórie viedlo k predpovediam nových fyzikálnych javov ešte pred ich objavením, nie sú síce výnimkou, no ani pravidlom. Vždy, keď sa vyskytne prvý prípad, je to síce silný argument v prospech správnosti teórie, no ani ten druhý ju nevyvracia. Hlavná úloha ideálnych pojmov je ďaleko prozaickejšia – majú zabezpečiť hladké fungovanie aparátu teórie. Tá sa potom verifikuje na základe zhody jej predpovedí o tých jej pojmoch, ktoré možno interpretovať v realite, s meraniami hodnôt im zodpovedajúcich fyzikálnych

veličín. Popritom však práve metaforický rozmer teórie tým, že prostredníctvom prirodzeného jazyka, len na základe formálnej príbuznosti ich matematického popisu, prenáša významy zo sfér blízkych našej skúsenosti do sfér pre ňu nedosiahnuteľných, nahrádza v mnohom našej intuícii jej stratenú oporu. Výklady ektrónu ako vlny, prípadne ako častice sú príkladmi dvoch takýchto navzájom duálnych a úspešne sa dopĺňajúcich metafor.

Ak sa podobná metóda ukázala plodnou vo fyzike, tým skôr je oprávnená v matematike, ba je v záujme oboch vied, aby si matematika v tomto smere sústavne udržiavala predstih. Ideálne matematické pojmy, ktoré nemajú svoj priamy vzor v realite a nezodpovedajú bezprostredne nijakým našim predstavám, sa v matematike vyskytovali odpradávna. Ich zavedenie si vynútili väčšinou vnútorné potreby matematiky a možno povedať, že práve ony robia matematiku matematikou. Ako celkom triviálny príklad, na ktorý sme si už zvykli natoľko, že ho dnes takto ani nevnímame, môžeme uviesť nulu a záporné celé čísla. Trochu zložitejšími príkladmi nám môžu poslúžiť imaginárne čísla alebo nevlastné body a nevlastná priamka v projektívnej rovine. V nemalej časti podobných prípadov práve rozvoj príslušnej matematickej teórie viedol postupne k vytvoreniu či dotvoreniu zodpovedajúcich názorných, intuitívnych predstáv, ako i k otvoreniu rozmanitých aplikácii, a tým i k interpretácii pôvodne výlučne ideálnych matematických pojmov prostredníctvom javov reálneho sveta. Keby sa však matematici už v tých obdobiach boli dôsledne riadili intuicionistickým kánonom, uvedené, dnes už nepostrádateľné pojmy by sa v matematike sotva kedy mohli objaviť.

Spomínané príklady majú navyše ešte jednu vlastnosť. Napríklad ľubovoľné tvrdenie aritmetiky reálnych čísel, dokázané s využitím čísel komplexných, možno dokázať i bez nich, len pomocou reálnych čísel, hoci za cenu dlhšieho a zložitejšieho dôkazu. V takých prípadoch hovoríme, že príslušné rozšírenie teórie „reálnych” objektov pomocou objektov „ideálnych” je *konzervatívne*. Pritom sa často stáva, že čím „ideálnejšie”, t. j. pôvodným „názorným” objektom vzdialenejšie matematické objekty používame, tým je efekt zjednodušenia výraznejší. Presnejšie, len vtedy považujeme takúto idealizáciu za oprávnenú. To však už nie sme schopní ilustrovať na našich elementárnych príkladoch. Nádherným príkladom je rozšírenie oboru reálnych funkcií pomocou distribúcií (z ktorých najznámejšia je tzv. Diracova δ-funkcia), motivované potrebami kvantovej mechaniky.

Za takéto ideálne pojmy, ktorých zavedenie je oprávnené výlučne ich prínosom k vnútornému rozvoju matematiky, najmä analýzy, považoval Hilbert aj aktuálne nekonečno a nekonečné množiny. Navyše očakával, že sa mu podarí dokázať konzervatívnosť príslušného (nie je celkom jasné ktorého) rozšírenia. Tým by bola kritika nekonečných množín naraz demaskovaná ako zatvrdilé spiatočníctvo, z nepochopiteľných, iracionálnych dôvodov odmietajúce vynález zápaliek v mene tradičného kresadla.

Hilbert sa teda ani najmenej nepokúša ospravedlňovať zavedenie aktuálneho nekonečna tým, že by trval na jeho výskyte niekde v reálnom svete, napríklad – ako bolo zvykom – v časopriestorovom kontinuu, ani sa nepokúša dôvodiť tým, že by nám snáď idea aktuálneho nekonečna bola vrodená alebo odniekiaľ „zhora” daná. Práve naopak, zrejme pod vplyvom kvantovej mechaniky uznáva, že absolútne matematické nekonečno sa nijakým množstvom reálnych objektov neaktualizuje. Taktiež nám toto nekonečno nie je v aktuálnej podobe bezprostredne dané ani v nazeraní ani v predstave, «ale len v závislosti od okolností k nemu dospievame interpoláciou alebo extrapoláciou niektorého myšlienkového procesu».

Najlepšie to dokladajú Hilbertove a Bernaysove poznámky v ich knihe *Základy matematiky* k známej Zenónovej apórii *Dichotómia*,

« ... ktorá sa zvyčajne rieši úvahou, že súčet nekonečného radu príslušných časových intervalov konverguje, teda napokon dáva konečný časový úsek. Jednako tento argument vôbec neberie do úvahy ten hlboko paradoxný moment, že nejaká nekonečná postupnosť po sebe nasledujúcich udalostí, ktorej završiteľnosť si nemôžeme ani predstaviť (nielen fakticky, no ani v princípe), sa nakoniec predsa len musí završiť.

V skutočnosti však jestvuje ďaleko radikálnejšie riešenie tohto paradoxu. Nemáme totiž najmenší dôvod predpokladať, že matematické časopriestorové predstavy o pohybe majú fyzikálny zmysel i v prípade ľubovoľne malých časových a priestorových úsekov. Práve naopak, všetko svedčí o tom, že v snahe pracovať s čo najjednoduchšími pojmami tento matematický model extrapoluje fakty z určitej oblasti našej skúsenosti, menovite z oblasti pohybov v rozmedziach veľkostí toho rádu, ktorý je ešte dostupný nášmu pozorovaniu, podobne ako sa dopúšťa istej extrapolácie mechanika kontinua, keď opiera svoje úvahy o predpoklad spojitého zaplnenia priestoru hmotou. Podobne ako pri neobmedzenom priestorovom delení voda prestane byť vodou, pri neobmedzenom delení pohybu vzniká čosi, čo už sotva možno nazvať pohybom. Ak prijmeme takéto stanovisko, paradox sa vytratí.

Nehľadiac na to, matematický model pohybu ako komplex ideálnych pojmov, zavedený kvôli zjednodušeniu našich predstáv, má nedoceniteľný význam. Aby však mohol plniť svoj účel, musí tento model okrem približnej zhody so skutočnosťou vyhovovať ešte jednej podmienke: extrapolácia v ňom vykonaná musí byť bezosporná sama so sebou. Z takéhoto hľadiska sa Zenónovou apóriou náš matematický opis pohybu nevyvracia ani najmenej: už spomínaný matematický protiargument tu možno uplatniť v plnom rozsahu. Jednako, niečo celkom iného je otázka, či naozaj disponujeme dôkazom bezospornosti matematickej teórie pohybu. Táto teória podstatným spôsobom využíva matematickú teóriu kontinua, ktorá sa zasa podstatne opiera o predstavu oboru prirodzených čísel ako zavŕšenej množiny.

Teda otázku existencie akejkoľvek nekonečnej množiny nemožno rozhodnúť poukazom na nejaké mimomatematické objekty, lež musíme ju vyriešiť vnútri matematiky samotnej.»

Tento dlhý voľný citát nás tak poznovu privádza k otázke, ktorou sme sa už dosť podrobne zaoberali v prvej kapitole. Je to otázka spôsobu existencie ideálnych matematických objektov. Majúc na pamäti čitateľa, ktorý túto kapitolu (na našu radu) vynechal, uvedieme na tomto, i niektorých ďalších miestach stručné zhrnutie v nej obsiahnutých úvah, potrebných pre ďalší výklad.

Ako sme už naznačili, teória množín sa zrodila v teologickom poňatí. V tomto poňatí ideálne matematické objekty, špeciálne nekonečné množiny, existujú v zavŕšenej podobe v mysli Božej.

Tak sa Boh stáva zárukou objektívnosti a rozhodcom pravdivosti matematického poznania, ktoré sa vlastne deje z jeho milosti.

Teologické poňatie teórie množín bolo onedlho opustené a pomerne bezbolestne prekryté poňatím novoplatónskym, ktoré sa s ním v mnohých podstatných črtách nápadne zhoduje. V novoplatónskom poňatí teórie množín nekonečné množiny objektívne existujú, nie však v reálnom, lež v ideálnom svete matematických objektov, nezávislom od nášho skúmania a poznatkov o ňom. O pravdivosti každého jedného matematického tvrdenia je tak rozhodnuté už vopred, nielen pred jeho dôkazom či vyvrátením, ale dokonca ešte skôr, ako bolo vyslovené, na základe poriadku tohto sveta. Tento ideálny svet vo svojom bytí predchádza svet reálny a reálne objekty sú len nedokonalými obrazmi či napodobeninami objektov ideálnych, pričom dokonalosť a čistota tých druhých je v tých prvých narušená a znečistená hmotou, z ktorej pozostávajú. Mimochodom, tento výklad tak okrem iného veľmi jednoducho vysvetľuje aplikovateľnosť matematiky. Cesta do ideálneho matematického sveta neprístupného priamej evidencii potom vedie cez očisťovanie foriem reálnych objektov od ich materiálnych náplní v našom myslení. Ak nás však navyše trápi otázka, odkiaľ sa v nás berie porozumenie pre ideálne, čisté formy vtlačené vždy len v skreslenej podobe skutočným objektom, zostáva nám už len znovu si vypomôcť teologickým poňatím alebo sa prikloniť k odpovedi v duchu Kantovom, podľa ktorej toto porozumenie je súčasťou nášho apriórneho porozumenia forme sveta, predchádzajúceho každú skúsenosť.

O konštruktívnom poňatí existencie matematických objektov sme sa už dosť podrobne zmienili v článku venovanom intuicionizmu. Existencia sa tu chápe ako uskutočniteľnosť istými dosť výrazne obmedzenými prostriedkami z objektov daných nám v intuícii (intuicionizmus) alebo znakov a slov nejakej konečnej abecedy (konštruktivizmus). Je jasné, že z takéhoto hľadiska nekonečné množiny veľkú nádej na existenciu nemajú. Naostatok ešte stručne poznamenajme, že práve intuicionizmus a konštruktivizmus nemalou mierou prispeli k dovŕšeniu diskreditácie teologického a novoplatónskeho poňatia.

Skôr než pristúpime k výkladu Hilbertovho stanoviska, záhodno ešte kvôli úplnosti spomenúť poňatie *pragmatické*, ktorého vplyvu nie je celkom zbavené ani Hilbertovo formalistické poňatie. V pragmatickom poňatí jediným meradlom oprávnenosti zavedenia nejakého matematického pojmu je jeho užitočnosť. V takom prípade, najmä ak nám to zjednodušuje prácu v rámci tej-ktorej teórie, môžeme teda s týmito ideálnymi matematickými pojmami narábať celkom tak, ako keby objekty, ktoré označujú, naozaj existovali, a nemá zmysel o celej veci ďalej filozofovať.

Podľa Hilberta úlohou matematiky nie je skúmať iba tento svet, ale vôbec *všetky možné svety*, prípadne, v trochu skromnejšej formulácii, nie iba to, čo sa nám vo svete skutočne ukazuje, ale aj všetko to, čo by sa nám v ňom mohlo vôbec ukázať.

Tak napríklad po objavoch rôznych neeuklidovských geometrií musela geometria voľky-nevoľky opustiť svoj pôvodný predmet, ktorým bol reálny priestor. Kleinov program jej potom vytýčil za úlohu skúmanie geometrie možných priestorov. A otázka, ktorá z nich sa v reálnom priestore skutočne realizuje, bola vytesnená z rámca matematiky.

Preto ani chápanie existencie ideálnych matematických objektov neslobodno zužovať len do podoby jestvovania súcien reálneho sveta, ani túto existenciu podmieňovať ich intuitívnou názornosťou, ale treba ho viazať výlučne na možnosť ich bezosporného pojmového uchopenia v rozume. Hilbert – čo ako sa to zdá prekvapivé, v tom je s ním zajedno i Poincaré – chápe existenciu v matematike ako logickú možnosť: existenciu priznávame všetkým tým objektom, o ktorých môžeme ako o existujúcich bezosporne uvažovať. Zatiaľ čo však Poincaré z paradoxov teórie množín vyvodil záver, že o nekonečných množinách bezosporne uvažovať nemožno, teda neexistujú, Hilbert sa podujal dokázať, že v niektorom vhodnom axiomatickom systéme zahŕňajúcom nekonečné množiny sa možno vyhnúť nielen známym paradoxom, ako sa to podarilo už Zermelovi a Russellovi, ale vôbec akýmkoľvek sporom.

Len celkom na okraj predsa upozornime na nezanedbateľnú skutočnosť, že naznačené poňatie existencie matematických objektov je svojou povahou možnostné čiže potencionálne. Hilbertovi však ide predovšetkým o aktuálne nekonečno. Lenže ak chceme objekty existujúce len v možnosti skúmať v aktualizovanej podobe, musíme sa najprv presvedčiť, že sú nielen bezosporné, ale aj uskutočniteľné, to znamená, že o nich možno nielen bezosporne uvažovať, ale že ich možno aj nejakým završeným tvorivým aktom uskutočniť, t. j. aktualizovať. K uskutočneniu čohokoľvek je však potrebná moc. Otázka, či jesto takej moci, ktorá je schopná uskutočniť všetko logicky možné, patrí k najťažším teologickým problémom. Bezprostrednému stotožneniu bezosporného s uskutočniteľným, k čomu nás – v teológii nepodkutých – môže nabádať hlas teologického poňatia zatlačený hlboko do podvedomia, však stojí v ceste ešte jedna prekážka. Obor všetkého uskutočniteľného, na rozdiel od bezosporného, totiž nemusí byť kompatibilný. Tým chceme povedať, že uskutočniteľnosť nejakých dvoch uskutočniteľných objektov môže byť navzájom nezlučiteľná. Uskutočnením jedného objektu môžeme zabrániť uskutočneniu iného, ktorý ešte dovtedy uskutočniteľný bol. V prvej kapitole sme videli, že v reálnom svete je táto situácia celkom bežná. Ak napríklad rozdrvíme nejaký kus mramoru na prach, už si z neho asi nepostavíme pomník. A novšie výsledky o nezávislosti niektorých tvrdení teórie množín nasvedčujú, že ani v matematike to akiste nebude inak.

Nejaký možný svet, prípadne sféra možných javov sveta, je v matematike vytýčený zadaním niekoľkých základných pojmov, pomenúvajúcich základné typy jeho objektov a vlastnosti a vzťahy, do ktorých tieto objekty môžu vstupovať, a predpísaním nejakého zoznamu axióm, ktorých úlohou je zachytiť, ako tieto vlastnosti a vzťahy vzájomne súvisia. Ďalšie poznatky o tomto svete potom získavame ako tvrdenia logicky odvodené z axióm, prípadne z už skôr odvodených tvrdení. Podobne, nové pojmy zavádzame definíciami pomocou základných alebo skôr definovaných pojmov.

To je stručná charakteristika axiomatickej metódy, dnes vari najrozšírenejšieho spôsobu uvažovania v matematike a výstavby matematických teórií. Jej objav pripisuje starogrécka tradícia Pytagorovi (6. stor. pr. n. l.) a dochovala sa nám už v značne rozinutej podobe vďaka Euklidovi (365?-275? pr. n. l.) v jeho *Základoch*. Proti súčasným prísnym požiadavkám axiomatického kánonu sa však Euklides ešte stále prehrešuje tým, že okrem svojich axióm a postulátov pri niektorých dôkazoch mimovoľne používa i niektoré ďalšie „očividné”, no nevyslovené predpoklady, napríklad o usporiadaní bodov na priamke.

Euklidova axiomatika, podobne ako vari všetky axiomatiky, ktoré sa vyskytli v matematike, no i vo fyzike a dokonca vo filozofii (spomeňme len Newtonovu mechaniku, Clausiovu termodynamiku či Spinozovu *Eticu ordine geometrico*) až do konca 19. storočia, mala obsažný charakter. To znamená, že Euklides sa stále do veľkej miery opiera o prirodzený názor a geometrickú intuíciu reálneho priestoru, v ktorom tiež všetky pojmy a tvrdenia svojej teórie bezprostredne interpretuje. Pravdivosť axióm a postulátov zdôvodňuje ich očividnou platnosťou v tejto ich prirodzenej interpretácii. Správnejšie by dokonca bolo nehovoriť v tejto súvislosti o interpretácii, ale priamo o opise priestoru. Otázka bezospornosti axiomatického systému sa pri takomto prístupe vôbec nenastoľuje. Zárukou bezospornosti celého systému je jeho „pravdivosť”, t. j. jeho zhoda so skutočnosťou.

Ďalšou príznačnou črtou výstavby Euklidovej geometrie je jej *konštruktívny* čiže *genetický* charakter. Euklides, a po ňom skoro všetci neskorší geometri, svoje geometrické objekty, ako body, priamky, kružnice a pod. zostrojuje a umiestňuje ich do priestoru. Priestor jeho geometrie je akási prázdna forma, ktorá rozhoduje o uskutočniteľnosti rôznych geometrických útvarov. Tie možno doň ukladať, no už vopred sú v ňom prítomné iba v možnosti, nie však v uskutočnení.

Zásadný obrat v ponímaní axiomatickej metódy prinášajú až Hilbertove *Základy geometrie* (1899), vyvolané potrebou vyrovnať sa so situáciou, ktorá vznikla v dôsledku paralelného spolužitia viacerých geometrií. V protiklade ku konštruktívnosti a obsažnosti axiomatiky Euklidovej má Hilbertova axiomatika charakter *existenciálny* a *formálny*.

Existenciálnosť, ktorá sa v matematike objavuje po prvýkrát u Bolzana ako dôsledok pohľadu otvoreného množinovým prístupom, tu znamená, že priestor je v Hilbertovom poňatí zaplnený až do posledného miestečka. Nielen body, ale vôbec všetky z hľadiska jeho formy prípustné útvary, ako úsečky, trojuholníky atď., sú v ňom už vopred, skôr, než k nemu geometer pristúpi, nejakým završeným tvorivým aktom privedené z možnosti k bytiu, sú v ňom bez jeho prispenia prítomné v uskutočnení. Teda geometer pri štúdiu tohto sveta vlastne nijaké objekty netvorí, iba na niektoré už vytvorené ukazuje a opisuje ich.

Geometrické objekty sú však zbavené materiálnych náplní ich reálnych vzorov, takže v geometrickom svete je zachovaná výlučne ich *forma*, dokonca i z nej len to, čo je výslovne zachytené v axiómach, teda i táto forma je tu značne idealizovaná. V tom spočíva formálny charakter Hilbertovej axiomatiky. Oprávnenosť takejto axiomatizácie sa neopiera o interpretáciu v reálnom priestore ani kdekoľvek inde. Každý z rôznych navzájom si protirečiacich axiomatických systémov je (aspoň predbežne) rovnako oprávnený. Inak povedané, pri axiomatickej výstavbe nejakej matematickej teórie – a nemusí to byť len v geometrii – sa pri formálnom prístupe a existenciálnom ponímaní jej predmetu príslušné objekty chápu ako vopred vytvorené v tvare akéhosi už završeného zoskupenia, pričom z ich vlastností a vzájomných súvislosti sa do úvahy berie len to, čo je v podobe akejsi esencie sformulované v jej axiómach, a od všetkého ostatného, t. j. od ich konkrétneho

obsahu, ako i od spôsobu ich existencie, *s výnimkou tejto existencie samotnej*, sa abstrahuje.

Navyše chápanie objektov teórie v tvare završeného, t. j. aktualizovaného zoskupenia priamo ponúka uchopiť ich ako *množinu*, t. j. jediný, príslušnou vnútornou štruktúrou, požadovanou axiómami, vybavený objekt; čiže od štúdia axiomatickej teórie prejsť rovno k štúdiu jej množinových modelov. Toto je naozaj v súčasnosti najbežnejší prístup. Často sa dokonca, prísne vzaté, ani tak nebuduje príslušná formálna teória, ale sa priamo prostredníctvom jej axióm definujú jej množinové modely, ktoré sa potom skúmajú ani nie tak v rámci nej samotnej, ako v rámci teórie množín. To môže niekedy zahmlievať pôvodný zmysel pojmov teórie, no častejšie to naopak dáva danej teórii do služby silné prostriedky teórie množín umožňujúce riešiť problémy, na ktoré by ona sama nestačila. Toho priam učebnicovým príkladom nám môže poslúžiť analytická teória čísel či využitie funkcionálnej analýzy v reálnej a komplexnej analýze.

Formalizmus teda, podobne ako logicizmus, buduje matematiku na axiomatickom základe. No na rozdiel od neho kladie dôraz práve na nelogické, t. j. obsažné axiómy, ktoré zachytávajú zvláštnosti študovanej teórie a nepokúša odvodiť celú matematiku len zo samotných logických axióm.

Formalizovaná axiomatická teória nepopisuje sama osebe nijakú realitu – je to len súbor axióm a pravidiel umožňujúcich odvodzovať z axióm ďalšie tvrdenia. Pritom univerzálny logický charakter týchto pravidiel nás oprávňuje veriť, že ľubovoľné javy, prostredníctvom ktorých možno interpretovať základné pojmy teórie tak, že sú zároveň splnené jej axiómy, spĺňajú aj logické dôsledky týchto axióm. Použitie klasického predikátového počtu v plnom rozsahu (vrátane zákona vylúčenia tretieho) je tu podopreté existencionálnym charakterom axiomatiky. Za cenu oslobodenia od obsahu svojich tvrdení tak axiomatizovaná teória dosahuje maximálnu všeobecnosť. Už nie je dôležité, o čom hovoríme, ale ako o tom hovoríme. Akonáhle v nej samej hovoríme správne, t. j. nedostávame sa do sporov, tak hovoríme správne o všetkom, prostredníctvom čoho ju možno interpretovať.

V Hilbertovom axiomatickom poňatí tak okrem iného dochádza k rozlíšeniu samotných tvrdení o existencii matematických objektov od ich interpretácií mimo matematiky. Toto rozlíšenie je vedené zámerom odstrániť základné nedorozumenie, kvôli ktorému dochádza v matematike neustále k sporom o existencii nekonečných množín, zobrať im tak pôdu pod nohami a usvedčiť ich ako jalové. To však predpokladá postihnúť nekonečnosť množín nejakou formálnou definíciou v rámci vhodnej axiomatickej teórie a podať presvedčivý dôkaz jej *bezospornosti*.

Ako však možno dokázať bezospornosť nejakej axiomatickej teórie, nevybočiac pritom z rámca matematiky?

Pre niektoré pomerne triviálne prípady vieme podať absolútne dôkazy bezospornosti zostrojením nejakého konečného modelu danej teórie. Vieme napríklad zadať dvojprvkovú grupu, čo dokazuje bezospornosť teórie grúp. Avšak pre teórie, ktoré by mohli kandidovať na funkciu základov matematiky, nie je v tomto smere nijaká nádej.

Najbežnejší spôsob spočíva v zostrojení modelu teórie, ktorej bezospornosť dokazujeme, v nejakej inej axiomatickej teórii, o ktorej bezospornosti sme už vopred presvedčení. Ak základné

pojmy pôvodnej teórie možno interpretovať prostredníctvom pojmov nejakej inej teórie tak, že interpretáciou axióm tej prvej sú dokázateľné tvrdenia tej druhej, tak z bezospornosti interpretujúcej teórie vyplýva bezospornosť teórie interpretovanej. Dôkaz logického sporu v pôvodnej teórii by sa totiž interpretáciou preniesol na dôkaz sporu v teórii, ktorej bezospornosť predpokladáme.

Takéto dôkazy bezospornosti však majú iba relatívny charakter. Tak napríklad Kleinov model dokazuje bezospornosť Bolyaiho-Lobačevského geometrie vzhľadom na geometriu Euklidovu. Bezospornosť Euklidovej geometrie možno zasa zaručiť za predpokladu bezospornosti aritmetiky reálnych čísel metódou súradníc. Podobne možno na otázku bezospornosti reálnej aritmetiky zredukovať tiež problém bezospornosti aritmetiky kedysi dávnejšie nedôverčivo pretriasaných čísel komplexných.

V postupnosti dôkazov relatívnej bezospornosti sa však raz musíme zastaviť. Aspoň pre jednu teóriu, v ktorej sme schopní interpretovať dosť obsiahlu časť matematiky, musíme podať absolútny dôkaz bezospornosti, t. j. dôkaz, ktorý by sa už neopieral o predpoklad bezospornosti nejakej inej axiomatickej teórie. Splneniu tejto úlohy však musí predchádzať vyjasnenie dvoch kľúčových otázok: Po prvé, ako vôbec možno podať „absolútny” dôkaz bezospornosti nejakej teórie (bez toho, že by sme zadali nejaký jej konečný model), a po druhé, pre ktorú axiomatickú teóriu ho treba podať najprv, t. j. na ktorú teóriu môžeme konečne bez obáv preniesť zodpovednosť za bezospornosť podstatnej časti matematiky.

Pristúpme teraz k prvej z našich otázok. Predovšetkým tvrdenie o bezospornosti nejakej axiomatickej teórie je tvrdením o dôkazoch možných v tejto teórii. Presnejšie, hovorí ono, že ani jeden takýto dôkaz nevedie k sporu, t. j. nie je dôkazom tvrdenia tvaru $\varphi\&\neg\varphi$, kde φ je ľubovoľné tvrdenie našej teórie. Ak teda chceme dokázať bezospornosť nejakej teórie, musíme samotné jej dôkazy učiniť predmetom nášho štúdia, lepšie povedané objektmi štúdia nejakej novej „metateórie". Teória, ktorá skúma ľubovoľné matematické dôkazy, sa nazýva *teória dôkazov* alebo tiež *metamatematika*.

Objektmi teórie dôkazov sú teda dôkazy vykonávané v samotnej matematike. Tie zvyčajne vyslovujeme či častejšie zapisujeme v nejakom jazyku. Väčšinou ide o hybrid prirodzeného jazyka a vhodnej matematickej symboliky. Takéto dôkazy však niekedy pripúšťajú viacero jazykových obratov na vyjadrenie tej istej myšlienky. Často sú dokonca zaťažené istou dvojzmyselnosťou, ich presný význam nenahliadame potom len z nich samých, ale aj zo širších súvislostí, do ktorých sú zasadené, z obsahu podkladaného v nich vystupujúcim tvrdeniam a pojmom a z neformálneho komentára. Ak však majú matematické dôkazy v rámci nejakej teórie dostáť požiadavkám kladeným na objekt novovekej objektívnej vedy, za akú sa, samozrejme, i metamatematika hodlá ustanoviť, musíme ich najprv patrične osamostatniť a objektivizovať. To znamená, že všetko to, čo na nich hodláme skúmať, musí byť zrejmé len z nich samých – a keďže ide o grafické jazykové útvary – len z ich grafickej formy. Za tým účelom im však potrebnú, celkom určitú a jednoznačne predpísanú formu musíme vnútiť. No to je možné len za cenu nového výrazného kroku v smere ďalšej formalizácie príslušnej axiomatickej teórie.

Po zbavení pojmov axiomatickej teórie ich pôvodného obsahu treba ešte kanonizovať formu jej jazyka. Tak sa všetky

objekty, ktoré táto teória študuje, ich vlastnosti, vzťahy medzi nimi a tvrdenia o nich reprezentujú niektorými znakmi symbolického jazyka teórie, či už jednoduchými, alebo konečnými postupnosťami jednoduchých znakov. Na základe vtedy už v podstate dotvoreného predikátového kalkulu možno potom formalizovať aj pojem dôkazu. Dôkazy sú jednoducho isté postupnosti tvrdení vybudované v zhode s deduktívnymi pravidlami logiky. Každý dôkaz je teda napokon iba akýsi nápis v príslušnom symbolickom jazyku. Pritom vnútorná štruktúra takéhoto formalizovaného jazyka a charakter logických axióm a odvodzovacích pravidiel umožňujú o ľubovoľnom nápise zostavenom z jeho znakov jednoznačne, celkom mechanicky len na základe jeho formy rozhodnúť, či je napríklad formulou, axiómou, dôkazom, dôkazom sporu a podobne.

Tvrdenie o bezospornosti teórie potom hovorí, že medzi jej dôkazmi sa nemôžu vyskytovať dôkazy sporu, t. j. nápisy istého presne opísaného a mechanicky rozpoznateľného tvaru.

Otázka existencie matematických objektov, vo svojom formalistickom poňatí chápaná ako bezospornosť, sa tak presúva z výšin metafyzických úvah na pevnú zem analýzy formálneho jazyka matematických teórií a redukuje sa v podstate na otázku správnej manipulácie s existenčným kvantifikátorom $\exists$, ktorú možno jednoducho vyjasniť už na úrovni predikátového počtu. Ak $\varphi(x)$ je formula nejakej formalizovanej teórie, tak objekt x s vlastnosťou popisovanou formulou $\varphi(x)$ existuje z hľadiska tejto teórie, len čo možno tvrdenie $(\exists x)\varphi(x)$ dokázať z jej axióm (samozrejme, všetko len za predpokladu, že táto teória je bezosporná).

Podobným spôsobom rieši formalizmus aj otázku pravdy v matematike. Táto otázka má zmysel len v rámci nejakej formálnej teórie. Pravdivosť nejakého tvrdenia potom neznamená nič iného než jeho dokázateľnosť z axióm tejto teórie.

Pre takúto pravdu, t. j. pre dokázateľnosť však vo všeobecnosti neplatí zákon vylúčenia tretieho. Napríklad z axióm teórie grúp nemožno dokázať tvrdenie $(\forall x, y)(xy = yx)$ ani jeho negáciu. Poznáme totiž množstvo (dokonca konečných) nekomutatívnych, ako aj komutatívnych grúp. Komutatívny zákon je teda tvrdenie od axióm teórie grúp nezávislé. Preto, ak chce Hilbert v diskusii s Brouwerom obhájiť platnosť klasickej logiky v plnom rozsahu, musí pre teóriu, o ktorú chce oprieť všetku matematiku, podať nielen dôkaz bezospornosti, ale aj nemenej presvedčivý dôkaz jej *úplnosti*. To posledné znamená, že pre ľubovoľné tvrdenie φ danej teórie aspoň jedno (a ak ide o bezospornú teóriu, tak dokonca práve jedno) z tvrdení φ, $\neg\varphi$ je v nej dokázateľné.

Ak má byť absolútny dôkaz bezospornosti, poprípade úplnosti nejakej formalizovanej teórie všeobecne presvedčivý, tak aby bol prijateľný napríklad aj pre intuicionistov, musí sa vyhnúť všetkým sporným neefektívnym metódam, ktorých oprávnenosť má koniec-koncov sám zaručiť. Presnejšie, všetky úsudky, z ktorých pozostáva, musia vyhovovať nasledujúcim podmienkam:

«Vždy sa uvažuje len o konečnom a presne určenom počte objektov a funkcií; funkcie sú presne definované, pričom ich popis umožňuje jednoznačne vypočítať ich hodnoty; nikdy sa netvrdí existencia akéhokoľvek objektu bez toho, že by bol daný návod ako ho zostrojiť; nikdy sa neuvažuje ako o završenom o akomkoľvek nekonečnom obore nejakých objektov *x*; ak sa hovorí, že nejaká úvaha alebo vlastnosť platí pre všetky takéto *x*, tak to neznamená nič viac než to, že túto všeobecnú úvahu možno zopakovať pre každé takéto konkrétne *x*, pričom príslušnú všeobecnú úvahu samotnú treba chápať len ako schému na vykonanie takýchto jednotlivých konkrétnych úvah.»

Toto najúplnejšie dochované vymedzenie takzvanej požiadavky *finitnosti* kladenej na metamatematiku pochádza od J. Herbranda. Všimnime si, že v ňom dochádza nielen k spresneniu, no i k sprísneniu intuicionistických požiadaviek intuitívnej názornosti a konštruktívnosti.

Vzaté do dôsledkov, finitný dôkaz úplnosti nejakej formalizovanej teórie predpokladá vypracovanie nejakej všeobecnej metódy, ktorá by umožňovala o ľubovoľnom tvrdení tejto teórie len na základe jeho formy rozhodnúť, či je v nej dokázateľné ono, alebo jeho negácia. Aby sme však o takejto metóde mohli dokázať, že skutočne robí to, čo má (nezabúdajme, že nám ide o *finitný* dôkaz úplnosti), musí táto metóda z ľubovoľného dokázateľného tvrdenia celkom mechanicky spätne zostaviť jeho dôkaz v našej teórii. Finitnému dôkazu úplnosti nejakej teórie musí teda predchádzať dôkaz jej *rozhodnuteľnosti*, čím sa myslí práve existencia takejto metódy. Vypracovanie rozhodovacej metódy pre nejakú teóriu, o ktorú možno oprieť všetku matematiku, by tak neznamenalo nič menšieho než naplnenie, ba v istom smere aj prekonanie Leibnizovho sna o „characteristike universalis", „calcule ratiocinator" a „ars iudicandi" aspoň v rámci matematiky.

Hoci Hilbert bol pevne presvedčený o riešiteľnosti každého matematického problému a toto svoje presvedčenie rozhodne aj verejne vyjadril, nie je z jeho diela a doložených postojov celkom jasné, či svoje stanovisko domyslel až do naznačených dôsledkov, ktoré sa nám dnes, vo svetle neskorších objavov môžu zdať krajnými, no jeho súčasníkom tak pripadať nemuseli. Avšak hĺbka dojmu, ktorým na neho ešte päť rokov po uverejnení Gödelovych viet o neúplnosti zapôsobili Churchove výsledky o nerozhodnuteľnosti aritmetiky a predikátového počtu, nasvedčuje, že – aspoň na počiatku – to asi nebolo inak. Napokon, keď si uvedomíme, že vďaka predikátovému počtu možno o ľubovoľnej postupnosti formúl nejakej formalizovanej teórie mechanicky rozhodnúť, či je alebo nie je dôkazom akéhokoľvek vopred daného tvrdenia v jej rámci, čo bolo známe už vtedy, nebude nám viac spomínaný názor pripadať ani trochu naivný. Práve naopak, celý problém teraz pred nami vystúpi v podobe závažnej otázky, ktorú je nutné si položiť a hľadať na ňu odpoveď, pričom sú veľmi dobré dôvody veriť, že to bude odpoveď kladná, taká, akú by sme si želali.

Pozrime sa teraz bližšie na druhú zo spomínaných otázok, t. j. na otázku voľby príslušnej teórie, pre ktorú hodláme podať dôkaz bezospornosti, rozhodnuteľnosti a úplnosti. Nepochybne, ideálne by bolo, keby sa nám také niečo podarilo pre nejaký dosť bohatý axiomatický systém teórie množín, napríklad pre teóriu ZF, či dokonca ZFC a podobne. V takýchto teóriách sa totiž skutočne podarilo interpretovať skoro všetku vtedajšiu matematiku. (I tak si však nedokážeme odoprieť poznámku, že za účelom tejto interpretácie boli mnohé matematické teórie v rôznom stupni skreslené, a čo sa takto zinterpretovať nepodarilo, bolo postupne zatlačené do úzadia.) Axiomatické teórie množín však obsahujú mnohé veľmi silné existenčné axiómy, takže dôkaz bezospornosti napríklad teórie ZF

určite nebude jednoduchou záležitosťou. Navyše situácia okolo početných otvorených otázok typu hypotézy kontinua už vtedy naznačovala, že známe axiomatizácie teórie množín budú mať asi do úplnosti ďaleko. A už tobôž sa nečrtala veľká nádej nájsť pre podobné teórie nejakú rozhodovaciu metódu.

Hilbertovým cieľom však nebolo ani tak zaručiť bezospornosť teórie množín (hoci ani táto otázka mu nebola ľahostajná), ale bezospornosť klasickej matematiky, čím sa myslí predovšetkým klasická analýza v tej podobe, akú nadobudla pod vplyvom jej množinového poňatia. Klasická analýza sa síce opiera o predstavu nekonečna ako aktuálneho, no na jej podopretie stačí ďaleko menej než niektorý axiomatický systém teórie množín. Jednotlivé reálne čísla možno totiž modelovať ako tzv. Dedekindove rezy, čiže ako isté nekonečné spočítateľné množiny čísel racionálnych. Teda dokonca i v prípade, že by sme netrvali na aktualizácii oboru všetkých reálnych čísel, už len uchopenie jednotlivých reálnych čísel ako samostatných objektov si vynucuje aktualizáciu nekonečného oboru čísel prirodzených. Na druhej strane značnú časť analýzy možno rozvinúť len na základe čísel racionálnych, ktoré zasa možno jednoducho zakódovať pomocou prirodzených čísel. Reálne čísla potom možno reprezentovať ako isté vlastnosti racionálnych teda – po príslušnom kódovaní – priamo prirodzených čísel. Tak dostávame interpretáciu aritmetiky reálnych čísel v aritmetike druhého rádu (v zmysle rozvetvenej teórie typov) čísel prirodzených. V matematickej analýze však bežne pracujeme ako so završenými, t. j. ako s objektmi, aj s rôznymi množinami reálnych čísel, s reálnymi funkciami a podobne. Teda na interpretáciu klasickej analýzy potrebujeme aritmetiku tretieho rádu. Pri niektorých náročnejších úvahách, ktoré podstatne využívajú napríklad aparát funkcionálnej analýzy, je však potrebné ísť v rádoch interpretujúcej aritmetiky ešte aspoň o jeden stupeň vyššie.

Každopádne sa však takto otvára cesta interpretovať jadro klasickej analýzy v aritmetike tretieho rádu a v podstate celú analýzu v aritmetike štvrtého alebo v krajnom prípade nejakého dosť vysokého rádu. Tým dospievajú k svojmu završeniu i snahy usilujúce o takzvanú aritmetizáciu matematiky, ktorých korene siahajú ešte ku Kroneckerovi, Dedekindovi, Fregemu a Poincarému. Otázky bezospornosti klasickej matematiky tak možno previesť na otázku bezospornosti aritmetiky tretieho (prípadne nejakého vyššieho) rádu. Na počiatku však stojí rád prvý. Najprv teda treba dokázať bezospornosť, rozhodnuteľnosť a úplnosť Peanovej aritmetiky (prvého rádu), a až potom sa možno pokúsiť pozdvihnúť tieto výsledky aj na vyššie rády.

Peanova aritmetika, skrátene ju budeme značiť PA, je teória prvého rádu popisujúca základné vlastnosti oboru prirodzených čísel, vybaveného operáciami nasledovníka (pričítanie jednotky), sčítania a násobenia (pomocou nich už možno jednoducho nadefinovať aj usporiadanie). V odbornej literatúre sa axiómy PA zvyknú uvádzať v trochu inom tvare, náš zoznam je však s obvyklou axiomatizáciou ekvivalentný a označením bližší stredoškolskej aritmetike.

Jazyk PA obsahuje dva znaky konštánt 0 a 1 a znaky dvojmiestnych operácií sčítania + a násobenia $\cdot$.

Prvá skupina axióm sa týka operácie nasledovníka:

(A1) $\quad 0+1=1,$

(A2) $\quad 0 \neq x+1,$

(A3) $\quad x+1=y+1 \;\Rightarrow\; x=y.$

Druhá skupina axióm je vlastne rekurzívnou definíciou operácie sčítania ako viacnásobného pričítania jednotky:

(A4) $\quad x+0=x,$

(A5) $\quad x+(y+1)=(x+y)+1.$

Podobne tretia skupina axióm je vlastne rekurzívnou definíciou operácie násobenia ako viacnásobného sčítania:

(A6) $\quad x\cdot 0=0,$

(A7) $\quad x\cdot(y+1)=x\cdot y+x.$

Konečne, schéma axióm indukcie obsahuje pre každú formulu $\varphi(x)$ v jazyku PA axiómu

(Aφ) $\quad [\varphi(0)\&(\forall x)(\varphi(x)\Rightarrow\varphi(x+1))]\Rightarrow(\forall x)\varphi(x).$

Axiómy „Peanovej aritmetiky” popísal ešte pred Peanom Dedekind. Obaja však uvádzali axiómu indukcie pre vôbec všetky (a nielen aritmeticky definovateľné) podmnožiny množiny $\mathbb{N}$. Išlo teda o teóriu druhého rádu. Autorom uvedenej axiomatizácie je až Hilbert.

Už na prvý pohľad vidíme, že Peanova aritmetika je veľmi jednoduchá a názorná teória, v ktorej je sformalizovaná, dalo by sa povedať, esencia finitného stanoviska, takže celá úloha vyzerá nanajvýš nádejne. Presnejšie, jej bezospornosť nám pripadá očividnou a samozrejmou, rozhodnuteľnosť zasa veľmi pravdepodobnou a jej úplnosti sme tiež náchylní uveriť. Aj keby to v poslednom prípade tak nebolo, malo by byť možné nájsť nejaké intuitívne pravdivé tvrdenia o prirodzených číslach, nezávislé od axióm PA, ktorých pridaním bude možné túto teóriu zúplniť. Dokonca i keby PA nebola rozhodnuteľná, jej zúplnenie by už malo mať i túto vlastnosť.

Dokázať niečo podobné aj pre vhodný axiomatický systém teórie množín zostáva síce aj naďalej naším cieľom, no tento cieľ je ešte natoľko neistý a vzdialený, že bude lepšie o tom zatiaľ ani nehovoriť.

Istá nádej sa však i v tomto smere predsa len črtá v súvislosti s už spomínanou vlastnosťou konzervatívnosti. Každé konzervatívne rozšírenie nejakej bezospornej teórie je totiž i samo bezosporné. Ak by sa nám teda podarilo dokázať bezospornosť (nejakého zúplnenia) Peanovej aritmetiky a ukázať, že nejaký dosť bohatý axiomatický systém teórie množín, zahŕňajúci nekonečné množiny a umožňujúci modelovať podstatnú časť matematiky, hlavne analýzy, je (jeho) jej konzervatívnym rozšírením, automaticky by to znamenalo bezospornosť aj tohto axiomatického systému.

To je v hrubých rysoch náčrt úloh, ktoré postavil pred matematiku a metamatematiku takzvaný *Hilbertov program*. Kvôli poriadku ešte poznamenajme, že dve etapy formalizácie matematických teórií historicky neprebiehali tak oddelene a po sebe, ako sme to tu vyložili, aby sme mohli lepšie objasniť niektoré ich základné rysy a zámery. V skutočnosti formalizácia teórií v zmysle abstrakcie od ich obsahu a formalizácia ich jazyka prebiehali skôr ruka v ruke a vzájomne sa podmieňovali.

Pri tejto príležitosti sa žiada upozorniť na určitú protikladnosť cieľov formalistického programu a jeho metodológie. Jedným z hlavných cieľov tohto smeru je totiž obhájiť postavenie absolútneho aktuálneho nekonečna, zrodeného v platónsko-teologickom poňatí, pokračujúcom v tradícii stredovekého realizmu v matematike. Jeho metodológia sa svojím dôrazom na jazyk matematických teórií zasa celá nesie v pozitivistickom duchu, nadväzujúcom na dedičstvo nominalizmu a empirizmu.

Hilbertov program teda možno čiastočne chápať aj ako pokus poistiť teologicko-platónske poňatie Cantorovej teórie nekonečných množín u pozitivistickej poisťovne.

Ešte je potrebné nakrátko sa pristaviť pri jednej námietke tradične vznášanej proti formalistickému poňatiu matematiky. Podľa nej formalizácia matematických teórii zbavuje matematiku jej zmyslu a mení ju len na akúsi formálnu hru so symbolmi podľa určitých, presne stanovených pravidiel. V istom zmysle je to námietka viac než oprávnená. V akom – o tom stručne pojednáme až v záverečnej kapitole. Nie je však nič nezmyselnejšie ako podsúvať niečo také Hilbertovi. Podobné námietky, samozrejme, najpresvedčivejšie vyvracia celé Hilbertovo matematické dielo, no dúfame, že i naše úvahy tu dostatočne dokladajú tú skutočnosť, že Hilbert svoj program formalizácie matematiky nerozpracoval v úmysle zbaviť matematiku jej zmyslu, ale s cieľom dokázať jej bezospornosť, a tým práve zaručiť jej zmysluplnosť nielen vo vzťahu k okolitému svetu, ale, a to predovšetkým, vo vzťahu k sebe samej. Navyše vyprázdnenie pôvodného obsahu niektorých matematických pojmov ich ani v najmenšom nezbavuje zmyslu, ale práve naopak, otvára ich možnosti zmysluplného naplnenia mnohými ďalšími obsahmi, často diametrálne odlišnými od pôvodného i navzájom medzi sebou. Formalistické poňatie je tak akýmsi vyústením klasického vývojového prúdu v matematike, usilujúceho o stále väčšiu presnosť a univerzálnosť.

I keď práca matematika v nejakej plne formalizovanej teórii, t. j. dokazovanie tvrdení z jej axióm, môže síce navonok pripomínať len nejakú hru so symbolmi, je také niečo skôr výnimkou než pravidlom. V matematike totiž bežne nepracujeme v plne formalizovaných teóriách. Intuitívny význam, ktorý podkladáme matematickým pojmom, je často rozhodujúcou oporou našich úvah, napomáhajúcou nám nielen nachádzať dôkazy rôznych tvrdení, lež najmä slúžiacou kritériom výberu tých z nich, ktoré vôbec vyslovujeme ako hypotézy a pokúšame sa ich dokázať alebo vyvrátiť. Lenže ani zďaleka nie všetky formálne správne utvorené tvrdenia danej teórie sú z tohto hľadiska zmysluplné.

Jednako o dôkaze nejakého tvrdenia si musíme byť istí, že sme v ňom nepoužili nič okrem axióm a logických pravidiel. V opačnom prípade by totiž takýto „dôkaz" nebol dôkazom v rámci príslušnej teórie. Ak nám naša intuícia našepkáva jeho oprávnenosť, tak to v najlepšom prípade môže znamenať len toľko, že príslušná axiomatická teória nezachytáva v dostatočnej miere to, čo mala zachytiť, a je preto načase poobzerať sa po nejakých nových axiómach, ktorými by sme ju mohli doplniť. No intuícia nás tiež ľahko môže zviesť na scestie. V takom prípade intuitívne „dokazujeme" tvrdenia, ktoré v danej teórii dokázateľné nie sú, či dokonca sú v nej dokázateľné ich negácie. Teda, krátko povedané, i vtedy, keď v matematike usudzujeme neformálne, je dôležité nespúšťať zo zreteľa cestu, ktorou by sme v prípade potreby mohli túto formalizáciu uskutočniť. Táto, do tých čias nevídane prísna požiadavka na presnosť matematických úvah bola formalizmom vnesená do matematiky nie samoúčelne, ale pod tlakom nevyhnutnosti ochrániť matematiku pred hroziacimi spormi. Obrazne povedané, formalizmus by nám mal poskytovať útočisko, kam by sme sa mohli uchýliť, keď sa ocitneme v úzkych, nemal by sa však stať naším

dobrovoľným väzením, medzi múry ktorého, čo aké bezpečie nám poskytujú, iba zriedka prenikne závan čerstvého vzduchu.

Dôrazom na formálnu stránku matematických úvah formalistické poňatie navyše výrazne prispelo k dôkladnému rozpracovaniu jazyka matematiky a jej symboliky. Pritom sa, v príkrom protiklade k intuicionistickým tézam, viac než presvedčivo potvrdila tá významná poznávacia úloha, ktorú zohráva jazyk a jeho značenie. Túto problematiku tu už nebudeme otvárať, poznamenáme len, že i samotná voľba vhodnej matematickej symboliky môže byť zdrojom nových pohľadov do matematického sveta aj nových objavov. Naopak, ťažkopádna symbolika a nešikovné označenie sa môžu stať neprekonateľnou hrádzou ďalšieho rozvoja tej-ktorej matematickej oblasti. To napokon nie je nič nové, stačí si len napríklad uvedomiť, do akej miery vďačia aritmetika a algebra za svoj rozvoj arabským čísliciam a neskôr Vietovmu označeniu, alebo infinitezimálny počet symbolike zavedenej Leibnizom.

Hilbertov program napredoval spočiatku veľmi úspešne. Ešte pred rokom 1920 sa viacerým matematikom podarilo rozšíriť výsledok o rozhodnuteľnosti a úplnosti výrokového počtu, získaný pomocou tabuliek pravdivostných hodnôt, teda finitnou metódou par excelence, aj na predikátový počet jednomiestnych predikátov (t. j. vlastností), zachovajúc pritom finitný charakter celej metódy. V roku 1925 Ackermann a v roku 1927 von Neumann dokázali bezospornosť aritmetiky s rôzne oslabenými schémami axióm indukcie. Herbrandova veta z roku 1930 zasa umožňovala istý druh redukcie – i keď nie plne finitnými metódami – predikátového počtu na výrokový počet.

Významným prínosom v tomto smere bol tiež Gödelov dôkaz *úplnosti* predikátového počtu z roku 1929, publikovaný v nasledujúcom roku. Hoci *Gödelova veta o úplnosti*, a už tobôž jej dôkaz nemá finitný charakter, jednako si ju možno do veľkej miery vykladať ako podopretie oprávnenosti východiskových téz formalizmu a každopádne – a bez akýchkoľvek relativizujúcich poznámok – ako definitívne potvrdenie adekvátnosti axiomatizácie klasického predikátového kalkulu.

Gödel najprv s použitím pomerne silných, hoci zďaleka nie najsilnejších prostriedkov teórie množín vrátane zákona vylúčenia tretieho a istej slabšej formy axiómy výberu pre spočítateľné systémy množín dokázal, že každá bezosporná teória formalizovaná v predikátovom počte má model, presnejšie, že ju možno interpretovať v teórii množín, dokonca v množine prirodzených čísel. Z toho už jednoducho vyplýva, že nejaké tvrdenie je dokázateľné v danej teórii práve vtedy, keď je splnené vo všetkých jej modeloch, t. j. interpretáciách v teórii množín, čo je samotná veta o úplnosti predikátového počtu.

To, že tvrdenie dokázateľné v danej teórii je splnené vo všetkých jej modeloch, teda *korektnosť* predikátového počtu, možno triviálne dokázať indukciou z definície spĺňania, no prísne vzaté tento dôkaz nie je celkom prostý bludného kruhu, lebo sa opiera o logiku nášho bežného jazyka či nejakého iného metajazyka. Také niečo vlastne „čistým spôsobom” dokázať nevieme, je to súčasť našej viery v správnosť logiky. Keby to tak nebolo, nemohli by sme vlastne logicky vyvodzovať nijaké závery.

Podstatná časť vety o úplnosti je sústredená v obrátenej implikácii: Tvrdenie splnené vo všetkých interpretáciách danej teórie je v nej dokázateľné.

Keby totiž φ bolo tvrdenie pravdivé vo všetkých interpretáciách teórie T a nedokázateľné v nej, tak teória T_1, ktorá vznikne pridaním novej axiómy $\neg\varphi$ k axiómam teórie T, by bola bezosporná. Potom však T_1má nejaký model M. M je však model teórie T, v ktorom je splnené $\neg\varphi$, teda nie je splnené φ, čo je spor.

Všimnime si, že sme práve „dokázali” tvrdenie φ tým, že sme nepriamo a neefektívne dokázali jeho dokázateľnosť, no nepodali sme jeho naozajstný dôkaz.

Gödelova veta o úplnosti zostáva tak trochu neprávom v tieni jeho slávnych viet o neúplnosti. Pritom jej pozitívny prínos pre matematiku je sotva menší a aj z filozofického hľadiska predstavuje nemenej výdatný zdroj podnetov na zamyslenie. Tu si všimnime aspoň jedno nedorozumenie, ku ktorému dochádza v dôsledku jej príliš bezstarostnej formulácie. Tvrdenie „každá bezosporná teória má model” sa zvykne považovať za potvrdenie správnosti Hilbertovho poňatia existencie v matematike, čiže sa mu rozumie ako tvrdeniu „všetko logicky možné (skutočne) existuje”. Jednako takýto výklad možno hájiť len z krajne platónskeho stanoviska, ktoré predpokladá ontologizáciu množín študovaných teóriou množín či aspoň množiny prirodzených čísel. Gödelova veta o úplnosti nie je tvrdením o reálnom svete a ani najmenej nezaručuje bezosporným teóriám akési „skutočné” modely, t. j. vlastne aplikácie. Modely, ktoré bezospornej teórii zaručuje, sú len jej modelmi v teórii množín, teda sú samy len akýmisi ideálnymi objektmi, ktorých existencia je taktiež problematická, dokonca i v tom najbenevolentnejšom Hilbertovom poňatí – je totiž viazaná na bezospornosť teórie množín či aspoň nejakého jej fragmentu.

Veta o úplnosti je tak tvrdením o teórii množín, presnejšie o jej ústrednom postavení medzi všetkými bezospornými formálnymi teóriami – samozrejme, len za predpokladu, že je i sama bezosporná.

Ešte väčšie nadšenie a optimizmus však v tábore Hilbertových stúpencov vzbudil dnes už tak trochu zapadnutý výsledok, ktorý – v približne rovnakom období ako Gödel svoju vetu o úplnosti – dokázal a publikoval Hilbertov žiak Moises Presburger. Presburger podrobne preskúmal aritmetiku prirodzených čísel, ktorá vznikne z Peanovej aritmetiky vynechaním operácie násobenia a všetkých axióm, v ktorých táto operácia vystupuje – t. j. axióm (A5), (A6) a axióm indukcie (Aφ), kde formula $\varphi(x)$ obsahuje znak násobenia. Teda Presburgerova aritmetika, skrátene označovaná tiež PrA, je vlastne formálnou teóriou sčítania prirodzených čísel, s plnou schémou indukcie pre vlastnosti, ktoré možno vyjadriť v jej jazyku. Pritom prísne finitnými prostriedkami dokázal, že táto teória je bezosporná, rozhodnuteľná a úplná, teda všetko to, čo sa od nej očakávalo a žiadalo.

Zdalo sa, že práve bol dosiahnutý rozhodujúci prelom v napĺňaní Hilbertovho programu a rozšírenie Presburgerových výsledkov na celú aritmetiku zahŕňajúcu aj násobenie a potom na jej vyššie rády, by už nemalo predstavovať zásadný problém a malo by byť len otázkou vynaloženej usilovnej práce a času. Dokonca nechýbali hlasy, ktoré si trúfali odhadovať ďalšie trvanie matematiky ako otvorenej vedy na niekoľko málo desaťročí. Potom sa mala zmeniť na hotový, uzavretý systém poznatkov a metód umožňujúcich celkom mechanicky a bez potreby zásahu tvorivého ľudského intelektu riešiť ľubovoľný precízne sformulovaný matematický problém.

11. Gödelove vety o neúplnosti a ich dôsledky

Uprostred optimizmu, ktorý na prelome dvadsiatych a tridsiatych rokov zavládol vo formalistickom tábore, sa zrazu, nečakane ako blesk z jasného neba, zjavili výsledky mladučkého rakúskeho matematika – mimochodom, narodil sa a vyrástol v Brne – Kurta Gödela (1906 - 1978). Stalo sa tak v roku 1930, keď Gödel na konferencii v Kráľovci, kde prednášal o svojej vete o úplnosti predikátového počtu, len tak nezáväzne vo voľnej diskusii ohlásil svoju takzvanú *prvú vetu o neúplnosti*. Podľa nej, voľne povedané, ľubovoľný bezosporný axiomatický systém, dosť bohatý na to, aby v jeho rámci bolo možné interpretovať Peanovu aritmetiku, je nutne neúplný, t. j. možno v ňom sformulovať pomerne jednoduché tvrdenia, týkajúce sa dokonca len prirodzených čísel, ktoré nemožno z jeho axióm ani dokázať ani vyvrátiť. Medzi axiomatické systémy, na ktoré sa Gödelova veta vzťahuje, patrí popri samotnej Peanovej aritmetike taktiež na teórii typov založený axiomatický systém Russellových-Whiteheadových Principia Mathematica, ako i všetky známe axiomatické systémy teórie množín, Zermelovým-Fraenkelovým počínajúc, teda vo všeobecnosti systémy, ktoré už dávnejšie kandidovali na funkciu základov matematiky.

Celá Gödelova práca, obsahujúca navyše i jeho takzvanú *druhú vetu o neúplnosti*, podľa ktorej, pokiaľ sú systémy spomínaného typu bezosporné, tak v nich nemožno dokázať ani túto ich vlastnú bezospornosť, vyšla potom v roku 1931.

A to bol ešte len prvý úder, ktorý mal zlý osud uštedriť Hilbertovmu programu. Ďalšie dva nemenej tvrdé, hoci prekvapivosť ich účinku nemožno s tým prvým už ani porovnať, prišli v roku 1936, keď Alfred Tarski (1901-1983) uverejnil svoj objav o *nedefinovateľnosti pravdy*, presnejšie o nedefinovateľnosti relácie spĺňania ani pre prirodzené čísla a jednomiestne formuly daného jazyka v spomínaných axiomatických systémoch, a Alonzo Church zasa dokázal *nerozhodnuteľnosť* Peanovej aritmetiky, ako aj predikátového počtu.

Skôr než sa pokúsime vyvodiť nejaké zovšeobecňujúce závery zo spomínaných napospol negatívnych výsledkov, považujeme za potrebné aspoň v hrubých rysoch ich načrtnúť a osvetliť. Náročnejšiemu čitateľovi sa vopred ospravedlňujeme za značné zjednodušenia a celý rad nepresností, ktorých sa pritom v záujme širšej prístupnosti celého výkladu dopustíme.

Časový odstup, z ktorého celú problematiku posudzujeme, nám umožňuje využiť v dnešnej hotovej podobe niektoré z matematických pojmov a výsledkov, ktoré sa vtedy ešte len v bolestiach rodili, a tým si pre ňu zadovážiť jednotiace hľadisko. Menovite nám ide o pojmy *rekurzívnej* a *primitívne rekurzívnej funkcie*, *rekurzívneho* a *primitívne rekurzívneho predikátu* či *množiny* a *rekurzívne spočítateľného predikátu* a *množiny*,

ktoré ako prví postupne rozpracovali Gödel, Church a jeho žiak Stephen Cole Kleene pôvodne takmer výlučne pre potreby matematickej logiky a základov matematiky. Poznamenajme, že dnes je teória rekurzívnych funkcií neodmysliteľnou súčasťou matematického základu teoretickej i aplikovanej informatiky. I my si teda dovolíme považovať uvedené pojmy za všeobecne známe. Pritom ani ich prípadná neznalosť nezabráni čitateľovi v sledovaní a pochopení ďalšieho výkladu. Kvôli jeho i vlastnému pohodliu sa totiž oprieme o takzvanú *Churchovu tézu*, ktorá nám na tomto mieste vlastne zohrá úlohu ich intuitívneho vysvetlenia, ak nie priam definície.

Podľa Churchovej tézy matematicky presne definovaný pojem rekurzívnej funkcie primerane a plne vystihuje pojem funkcie efektívne mechanicky vypočítateľnej a pojem rekurzívneho predikátu splýva s pojmom predikátu, ktorého splnenie možno algoritmicky rozhodnúť. Pojem primitívne rekurzívnej funkcie, prípadne predikátu potom vymedzuje dôležitú podtriedu v podstate najjednoduchších a najdostupnejších objektov v triede všetkých rekurzívnych funkcií, prípadne predikátov. Konečne pojem rekurzívne spočítateľnej množiny splýva s pojmom množiny, ktorej všetky prvky možno postupne mechanicky generovať. Navyše platí, že každá rekurzívne spočítateľná množina či predikát je oborom hodnôt nejakej *primitívne* rekurzívnej funkcie.

Podrobnejšie posúdenie dôvodov svedčiacich pre a proti Churchovej téze leží tak trochu bokom od hlavného smeru našich úvah, nuž si ho tentoraz odpustíme. Napriek tomu, že dôvodov v prospech Churchovej tézy je rozhodujúca väčšina, nie je to od nás celkom poctivé. Snáď nás môže aspoň čiastočne ospravedlniť, že sme si toho plne vedomí a ku všetkému sa priznávame.

Základná neformálna myšlienka Gödelovho objavu je vlastne veľmi jednoduchá, no o to vtipnejšia. Gödel iba „mierne" posunul nám už známy Epimenidov paradox ukrytý v spornom tvrdení, ktoré vypovedá o sebe samom: „som nepravdivé", a v ktorom koniec koncov väzí jadro Cantorovej diagonálnej metódy i väčšiny skôr uvedených paradoxov. Namiesto toho Gödelovo tvrdenie o sebe hovorí: *„som nedokázateľné"*.

Zdanlivo sa tým nič nemení. I toto tvrdenie, zdá sa, vedie k sporu. Ak je totiž nepravdivé, tak je dokázateľné. Ak je však náš pojem dokázateľnosti korektný, t. j. všetky dokázateľné tvrdenia sú pravdivé, o čom nehodláme pochybovať, tak je i toto tvrdenie pravdivé. To je však spor. Zostáva teda len druhá možnosť, že Gödelovo tvrdenie je pravdivé. Tým sme teda toto tvrdenie dokázali. Potom je však dokázateľné, teda pravdivé, a zároveň je pravda, čo hovorí, teda je nedokázateľné. Opäť sme dospeli k sporu.

Tomuto sporu sa však možno vyhnúť, ak pod dokázateľnosťou, o ktorej sa hovorí v Gödelovom tvrdení, budeme rozumieť dokázateľnosť v rámci nejakého pevného formálneho axiomatického systému. Z hľadiska takéhoto systému náš „dôkaz" Gödelovho tvrdenia nie je nijakým dôkazom, ale iba neformálnym intuitívnym zdôvodnením jeho pravdivosti, opierajúcim sa o vieru v korektnosť príslušného formálneho systému. Potom Gödelovo tvrdenie bude príkladom pravdivého, no nedokázateľného tvrdenia. Podobne, z korektnosti príslušného systému nutne vyplýva tiež nedokázateľnosť negácie Gödelovho

tvrdenia. Teda toto tvrdenie je nevyvrátiteľné. V opačnom prípade by totiž bolo pravdivé zároveň so svojou negáciou.

Axiomatické systémy, v ktorých možno sformulovať takéto Gödelovo tvrdenie, pokiaľ sú bezosporné, sú teda nutne neúplné a formálnou dokázateľnosťou v ich rámci sa pojem pravdivosti nevyčerpáva. Túto vlastnosť majú predovšetkým všetky axiomatické systémy, v ktorých možno interpretovať Peanovu aritmetiku (dokonca i táto požiadavka sa dá ešte trochu oslabiť).

Je iróniou osudu, že Gödel prišiel na svoj objav v snahe uskutočniť ciele Hilbertovho programu, pri hľadaní vhodnej interpretácie analýzy v aritmetike. Pritom sa mu však podarilo aritmetizovať i metamatematiku, špeciálne samotný pojem dôkazu a dokázateľnosti, čo ho priviedlo k už spomínaným výsledkom, z ktorých práve naopak vyplynula neuskutočniteľnosť Hilbertovho programu (aspoň v jeho pôvodnej podobe).

Teda trochu podrobnejšie, Gödel si všimol, že ak vzájomne jednoznačne priradíme každému jednoduchému znaku nejakého formálneho jazyka isté prirodzené číslo ako jeho kód, možno toto kódovanie rozšíriť aj na slová, t. j. zložené znaky jazyka a ich postupnosti. Práve v tomto kódovaní tkvie samotná podstata Gödelovho objavu vari ešte vo väčšej miere, než v skôr uvedenom posune Epimenidovho paradoxu. Na tejto metóde sa totiž zakladajú nielen ďalšie objavy, ktoré tu spomenieme, ale i celé jedno odvetvie modernej matematickej logiky a aritmetiky. Napokon ťažko možno vôbec posúdiť, do akej miery treba šokujúci účinok Gödelových výsledkov pripísať na vrub ich samotnej formulácie a do akej má na ňom zásluhu ním rozpracovaná metóda kódovania, presnejšie, jej prísne finitný charakter. Na tomto mieste sa však nemienime púšťať do jej technických podrobností. Pre naše účely celkom postačí, ak niekoľko jej ďalej uvedených výsledkov prijmeme ako hotové fakty.

Nech T označuje nejakú, v celom článku tú istú, no inak ľubovoľnú, formálnu axiomatickú teóriu, v ktorej možno interpretovať Peanovu aritmetiku. Istá jemnosť našich úvah si vyžaduje rozlišovať medzi premennými v teórii T (budeme pre ne používať znaky x, y, z, w) a konštantnými termami označujúcimi prirodzené čísla (budeme ich značiť j, k, m, n). Všetky formuly teórie T s nanajvýš jednou voľnou premennou x sú zoradené do postupnosti $\{\varphi_n(x)\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ a podobne, všetky dôkazy v teórii T do postupnosti $\{\Delta_k\,;\, k \in \mathbb{N}\}$. Pritom pre dané prirodzené číslo j vieme efektívne zostrojiť formulu $\varphi_j(x)$ i dôkaz Δ_j. Taktiež naopak, k danej formule $\psi(x)$ (prípadne dôkazu Γ) vieme efektívne nájsť príslušný kód, t. j. prirodzené číslo j také, že $\psi(x)$ je $\varphi_j(x)$ (prípadne Γ je Δ_j). Navyše teória T má primitívne rekurzívne trojmiestne predikáty $P(x,y,z)$ a $R(x,y,z)$ také, že pre ľubovoľné čísla k, m, n platí

$P(m,n,k)$ práve vtedy, keď Δ_k je dôkazom tvrdenia $\varphi_n(m)$

a

$R(m,n,k)$ práve vtedy, keď Δ_k je dôkazom tvrdenia $\neg\varphi_n(m)$.

Teda tvrdenie $(\exists z)P(m,n,z)$ hovorí formálne to isté ako tvrdenie „existuje dôkaz tvrdenia $\varphi_n(m)$", čiže „tvrdenie $\varphi_n(m)$ je dokázateľné". Podobne tvrdenie $(\exists z)R(m,n,z)$ je formalizáciou tvrdenia „existuje dôkaz tvrdenia $\neg\varphi_n(m)$", čiže „tvrdenie $\varphi_n(m)$ je vyvrátiteľné". Pre istotu ešte poznamenajme, že pod dôkazom, dokázateľnosťou, prípadne vyvrátiteľnosťou tu stále rozumieme dôkaz, dokázateľnosť, prípadne vyvrátiteľnosť v teórii T.

Nasledujúce úvahy urobíme len pre predikát $P(x,y,z)$, no spôsob, akým by sme ich mohli preniesť aj na k nemu duálny predikát $P(x,y,z)$ je očividný.

Z toho, čo sme povedali o Gödelovom kódovaní formúl a dôkazov, je zrejmé, že z dokázateľnosti tvrdenia $\varphi_n(m)$ vyplýva dokázateľnosť tvrdenia $(\exists z)P(m,n,z)$. Z nejakého dôkazu Γ tvrdenia $\varphi_n(m)$ môžeme totiž určiť jeho číslo; označme ho k. Potom však platí $P(m,n,k)$, a teda tiež $(\exists z)P(m,n,z)$.

No obrátená implikácia už taká samozrejmá nie je. Predpokladajme, že sme dokázali tvrdenie $(\exists z)P(m,n,z)$. Čiže sme dokázali, že existuje dôkaz tvrdenia $\varphi_n(m)$. Môžeme oprávnene tvrdiť, že sme tým dokázali priamo tvrdenie $\varphi_n(m)$? Dokázať nejaké tvrdenie však znamená napísať jeho dôkaz. Ak bol náš dôkaz tvrdenia $(\exists z)P(m,n,z)$ konštruktívny, taký, že sme v ňom našli nejaké k, pre ktoré platí $P(m,n,k)$, tak z neho vieme dekódovať dôkaz Δ_k tvrdenia $\varphi_n(m)$ a všetko je v poriadku. Ak bol náš dôkaz tvrdenia $(\exists z)P(m,n,z)$ konštruktívny len v tom zmysle, že sme v ňom opísali návod ako nájsť nejaké číslo k také, že $P(m,n,k)$, tak tento návod spolu s dekódovacím návodom nám dávajú výsledný návod ako napísať nejaký dôkaz Δ_k tvrdenia $\varphi_n(m)$. V takomto prípade by sme teda ešte stále mohli prižmúriť oko a pripustiť, že sme dokázali i tvrdenie $\varphi_n(m)$, presnejšie, že by sme ho mohli kedykoľvek dokázať, keby sme chceli a mali dosť času. Čo však v prípade, keď náš dôkaz tvrdenia $(\exists z)P(m,n,z)$ je celkom nekonštruktívny, to znamená, že nemáme ani predstavu, ako by sme mali nejaké k také, že $P(m,n,k)$, a teda i dôkaz Δ_k tvrdenia $\varphi_n(m)$, hľadať? Dôkaz tvrdenia $\varphi_n(m)$ teda nemôžeme napísať, ani keby sme chceli. Vieme len, že predpoklad $(\forall z)\neg P(m,n,z)$ vedie k sporu. Máme stále právo tvrdiť, že sme dokázali tvrdenie $\varphi_n(m)$?

Istotne by to bolo tak, keby bola dokázateľná aj implikácia $(\exists z)P(m,n,z) \Rightarrow \varphi_n(m)$, čo z triviálnych dôvodov nastane vždy, keď je dokázateľné tvrdenie $\varphi_n(m)$. To je však z hľadiska našej otázky ten najmenej zaujímavý prípad. No podľa výsledku Martina H. Löba z r. 1955, je to prípad jediný. Presnejšie, podľa Löbovej vety je implikácia $(\exists z)P(m,n,z) \Rightarrow \varphi_n(m)$ dokázateľná vtedy a len vtedy, keď je dokázateľné tvrdenie $\varphi_n(m)$. Vidíme, že ani tadiaľto cesta nevedie.

V tejto chvíli by toho náš bystrý a nie slepo dôverčivý čitateľ mal mať konečne dosť. Nevodí nás autor tak trochu za nos? Vychádzame predsa z predpokladu dokázateľnosti tvrdenia $(\exists z)P(m,n,z)$. Tým skôr teda toto tvrdenie platí. Teraz začneme postupne zisťovať platnosť tvrdení

$P(m,n,0),\ P(m,n,1), P(m,n,2),\ \ldots,$

atď., čiže budeme postupne odpovedať na otázky:

„Je Δ_0 dôkazom tvrdenia $\varphi_n(m)$?"

„Je Δ_1 dôkazom tvrdenia $\varphi_n(m)$?"

„Je Δ_2 dôkazom tvrdenia $\varphi_n(m)$?"

atď. Sám autor sa nám pred chvíľou snažil nahovoriť, že každú z týchto otázok vieme, dokonca celkom mechanicky, zodpovedať. Len čo po prvýkrát dostaneme odpoveď „áno", t. j. nájdeme najmenšie prirodzené číslo k také, že platí $P(m,n,k)$, dekódujeme z neho dôkaz Δ_k tvrdenia $\varphi_n(m)$. Ale pretože platí $(\exists z)P(m,n,z)$, také k musí existovať, teda skôr či neskôr k nemu dospejeme.

To všetko je naozaj veľmi pekné a až na poslednú vetu je to v poriadku. Tá však predpokladá, že naše „obyčajné" prirodzené čísla, t. j. množina $\mathbb{N}$ s obvyklým sčítaním a násobením sú modelom Peanovej aritmetiky v teórii T, čo nemusí byť

pravda. Bez tohto predpokladu nevieme vylúčiť, že tvrdenie $(\exists z)P(m,n,z)$, ako aj všetky tvrdenia $\neg P(m,n,0)$, $\neg P(m,n,1)$, $\neg P(m,n,2)$, … , atď. budú súčasne dokázateľné v T. Potom by celá naša úvaha z predošlého odstavca skutočne skrachovala na poslednej vete.

Teória T sa nazýva *ω-sporná*, ak pre nejakú formulu $\psi(z)$ je v nej dokázateľné tvrdenie $(\exists z)\psi(z)$, ako aj všetky tvrdenia $\neg\psi(k)$ pre ľubovoľné prirodzené číslo k. V opačnom prípade hovoríme, že T je *ω-bezosporná*.

Čitateľovi prenechávame, aby sa sám presvedčil, že z ω-bezospornosti teórie T už vyplýva jej bezospornosť.

Ľahko nahliadneme, že v ω-bezospornej teórii T už naša úvaha prejde až do konca. Ak je totiž dokázateľné $(\exists z)P(m,n,z)$, tak pre nejaké prirodzené číslo k nie je dokázateľné $\neg P(m,n,k)$. Avšak otázka platnosti tvrdenia $\neg P(m,n,k)$ je mechanicky rozhodnuteľná, pričom rozhodovací proces zároveň dáva dôkaz jedného z tvrdení $P(m,n,k)$, $\neg P(m,n,k)$. Keďže druhý prípad nastať nemôže, musí to byť ten prvý.

Podrobnejší rozbor práve nastolenej otázky už presahuje rámec našich úvah. Dúfame však, že už len jej položením sme aspoň trochu osvetlili onen zvláštny rys matematickej formalizácie, ktorý spočíva v jej tendencii neustále prekračovať sféry javov, ktoré mala pôvodne postihovať, a vymykať sa pôvodným zámerom, ktorým mala slúžiť. Obrazne povedané, je to akýsi džin vypustený z fľaše. Je zaujímavé a snáď i dosť prekvapivé a nečakané, že táto tendencia sa tak nápadne prejavila práve pri formalizácii pojmu matematického dôkazu, keďže ide o sféru podriadenú prísnym kánonom logiky, teda zdanlivo oveľa prístupnejšiu formalizácii než ľubovoľná iná sféra samotnej matematiky, o javoch reálneho sveta ani nehovoriac.

Konečne teda môžeme pristúpiť k formulácii a náčrtom dôkazov sľubovaných výsledkov Gödela, Tarského a Churcha.

Uvažujme formulu $\neg(\exists z)P(x,x,z)$. Keďže ide o formulu s jedinou voľnou premennou x, prislúcha jej nejaké číslo – označme ho g. Potom formula $\varphi_g(x)$ vydeľuje tie prirodzené čísla m, pre ktoré tvrdenie $\varphi_m(m)$ nie je dokázateľné. Špeciálne, tvrdenie $\varphi_g(g)$ hovorí o sebe: „som nedokázateľné”, teda je formálnym zápisom už skôr spomínaného Gödelovho tvrdenia.

Prvá Gödelova veta o neúplnosti.

a) Ak je teória T bezosporná, tak tvrdenie $\varphi_g(g)$ nie je dokázateľné v T.

b) Ak je teória T ω-bezosporná, tak ani tvrdenie $\neg\varphi_g(g)$ nie je dokázateľné v T.

Z ω-bezospornosti teórie T teda vyplýva jej neúplnosť.

Predpokladajme, že tvrdenie $\varphi_g(g)$ je dokázateľné. Potom je dokázateľné i tvrdenie $(\exists z)P(g,g,z)$, čo je tvrdenie $\neg\varphi_g(g)$. To však znamená, že tvrdenia $\varphi_g(g)$, $\neg\varphi_g(g)$ sú dokázateľné v T, čiže T je sporná teória. Ak teda T je bezosporná, tak $\varphi_g(g)$ nie je v nej dokázateľné.

Predpokladajme, že je dokázateľné tvrdenie $\neg\varphi_g(g)$. Toto tvrdenie je logicky ekvivalentné s tvrdením $(\exists z)P(g,g,z)$. Už sme však videli, že za predpokladu ω-bezospornosti z toho vyplýva dokázateľnosť tvrdenia $\varphi_g(g)$. Teda opäť dospievame k sporu v teórii T, v dôsledku čoho tvrdenie $\neg\varphi_g(g)$ nemôže byť dokázateľné.

Z nedokázateľnosti tvrdenia $\varphi_g(g)$ vyplýva bezospornosť teórie T^*, ktorá vznikne z T pridaním novej axiómy $\neg\varphi_g(g)$. Z predpokladu bezospornosti teórie T teda vyplýva, že T^* je príkladom bezospornej, no ω-spornej teórie.

Možnosť výskytu bezosporných no ω-sporných teórií tiež čiastočne problematizuje Hilbertovo poňatie existencie matematických objektov ako bezospornosti teórie, v rámci ktorej sú formalizované. Pojem bezospornosti sa ukazuje slabý na to, aby samotný mohol slúžiť kritériom „pravdivosti” matematických teórií. Od teórií, ktoré by mohli zohrať úlohu základov matematiky, sa zdá rozumné vyžadovať ešte aspoň ω-bezospornosť.

Spôsob, ako sa možno v prvej Gödelovej vete zbaviť dodatočných predpokladov typu ω-bezospornosti, objavil Barkley Rosser v onom „úrodnom” roku 1936.

Uvažujme formulu

$$(\forall z)(P(x,x,z) \ \Rightarrow\ (\exists w \le z)R(x,x,w))$$

s jedinou voľnou premennou x. Jej číslo označme r. Potom i Rosserovo tvrdenie $\varphi_r(r)$ vypovedá o sebe: „ak si vezmeme ľubovoľný môj dôkaz, potom medzi dôkazmi s číslom menším alebo rovným číslu tohto môjho dôkazu možno nájsť dôkaz mojej negácie”.

Gödelova-Rosserova veta. Ak je teória T bezosporná, tak ani jedno z tvrdení $\varphi_r(r)$, $\neg\varphi_r(r)$ nie je v nej dokázateľné. Teda T je neúplná.

Opäť ukážeme, že predpoklad dokázateľnosti tak tvrdenia $\varphi_r(r)$, ako i tvrdenia $\neg\varphi_r(r)$ má za následok spor v teórii T.

Nech je dokázateľné $\varphi_r(r)$, a nech Δ_k je jeho dôkaz. Potom sú dokázateľné i tvrdenia $P(r,r,k)$ a $(\exists w \le k)R(r,r,w)$. To druhé je logicky ekvivalentné s disjunkciou

$$R(r,r,0) \vee R(r,r,1) \vee \ldots \vee R(r,r,k).$$

Ale to znamená, že stačí prehliadnuť dôkazy $\Delta_0,\ \Delta_1,\ldots,\ \Delta_k$ a určite medzi nimi nájdeme aspoň jeden, ktorý je dôkazom tvrdenia $\neg\varphi_r(r)$, totiž dôkaz Δ_j, kde pre j platí $j \leq k$ a $R(r,r,j)$.

Podobne, nech je dokázateľné $\neg\varphi_r(r)$ a Δ_j je jeho dôkaz. Potom je dokázateľné aj $R(r,r,j)$, a keďže $\neg\varphi_r(r)$ je logicky ekvivalentné s tvrdením

$$(\exists z)(P(r,r,z) \& \neg(\exists w \leq z)R(r,r,w)),$$

je dokázateľné $(\exists z < j)P(r,r,z)$. Potom nutne $j > 0$ a ostatné tvrdenie je logicky ekvivalentné s disjunkciou

$$P(r,r,0) \vee P(r,r,1) \vee \ldots \vee\ P(r,r,j-1).$$

Potom však medzi dôkazmi $\Delta_0,\Delta_1,\ldots,\Delta_{j-1}$ možno nájsť dôkaz Δ_k, kde $k < j$ a $P(r,r,k)$, ktorý je dôkazom tvrdenia $\varphi_r(r)$.

Len pre zaujímavosť ponechávame čitateľovi, aby si premyslel, ako je to s tzv. Henkinovým tvrdením, ktoré samo osebe hovorí „som dokázateľné". Jeho formalizáciou je tvrdenie $\varphi_h(h)$, kde h je číslo formuly $(\exists z)P(x,x,z)$. Nuž, z Löbovej vety vyplýva, že Henkinovo tvrdenie je dokázateľné (prečo?), a tým skôr pravdivé.

Na vyslovenie druhej Gödelovej vety o neúplnosti je najprv potrebné formalizovať tvrdenie o bezospornosti teórie T. Bezospornosť teórie T znamená toľko, že nemožno nájsť tvrdenie tvaru $\varphi_n(m)$, ktoré je dokázateľné zároveň so svojou negáciou.

Formalizáciou tvrdenia o bezospornosti teórie T je potom tvrdenie

$$\neg(\exists x,y,z,w)(P(x,y,z)\ \&\ R(x,y,w)),$$

ktoré označíme Cons_T .

Druhá Gödelova veta o neúplnosti. Ak je teória T bezosporná, tak tvrdenie Cons_T nie je dokázateľné v T.

Ak pozornejšie preskúmame dôkaz bodu a) prvej Gödelovej vety o neúplnosti, zistíme, že sme tam vlastne neformálne ukázali platnosť tvrdenia

$$(\exists z)P(g,g,z) \ \Rightarrow\ (\exists w)R(g,g,w),$$

ktoré je formalizáciou tvrdenia „ak $\varphi_g(g)$ je dokázateľné, tak aj $\neg\varphi_g(g)$ je dokázateľné". Z tohto formalizovaného tvrdenia na základe logických pravidiel postupne vyplýva

$$(\exists z)P(g,g,z) \Rightarrow (\exists z,w)(P(g,g,z)\ \&\ R(g,g,w)),$$

$$(\exists z)P(g,g,z) \Rightarrow (\exists x,y,z,w)(P(x,y,z)\ \&\ R(x,y,w)),$$

$$\neg(\exists x,y,z,w)(P(x,y,z)\ \&\ R(x,y,w)) \Rightarrow \neg(\exists z)P(g,g,z),$$

čo však nie je nič iného než $\mathrm{Cons}_T \ \Rightarrow\ \varphi_g(g)$.

Keby teda tvrdenie Cons_T bolo dokázateľné, bolo by dokázateľné aj tvrdenie $\varphi_g(g)$, čo, ako sme už videli, nemôže nastať v bezospornej teórii T.

Všimnime si, že až dosiaľ sme sa vo formulácii Gödelových viet starostlivo vyhýbali metafyzikou zaváňajúcemu pojmu *pravdy*, hoci pravdivosť Gödelovho tvrdenia $\varphi_g(g)$ sme intuitívne zdôvodnili. Podobne možno zdôvodniť aj pravdivosť

Rosserovho tvrdenia $\varphi_r(r)$. Aby sme však ich pravdivosť mohli nielen neformálne zdôvodniť, ale i formálne dokázať v teórii T, museli by sme formalizovať aj samotný pojem pravdy. Hoci z predošlých výsledkov už vieme, že pôvodný Hilbertov zámer vyčerpať pravdivosť dokázateľnosťou sa nám naplniť nepodarí, jednako, ak by sa nám nejakým spôsobom podarilo formálne nadefinovať vlastnosť tvrdení „byť pravdivým”, mohlo by nám to poskytnúť ďalšiu cennú informáciu o vzťahu medzi pravdivosťou a dokázateľnosťou. Vďaka Tarskému však vieme, že všetky naše pokusy v tomto smere sú vopred odsúdené na neúspech.

Tarského veta o nedefinovateľnosti pravdy. Ak je teória T bezosporná, tak relácia $S = \{(m,n) \in \mathbb{N}^2\,;\ \varphi_n(m)\}$, v ktorej sa nachádzajú prirodzené čísla m, n práve vtedy, keď platí $\varphi_n(m)$, nie je definovateľná v rámci teórie T, t. j. neexistuje formula $\sigma(x,y)$ teórie T taká, že $S = \{(m,n) \in \mathbb{N}^2\,;\ \sigma(m,n)\}$.

Ukážeme, že z existencie takej formuly $\sigma(x,y)$ už vyplýva spor v teórii T. Nech teda $\sigma(x,y)$ je formula taká, že pre ľubovoľné prirodzené čísla$m$, n platí $\varphi_n(m) \Leftrightarrow \sigma(m,n)$. Nech t je číslo formuly $\neg\sigma(x,x)$. Potom $\varphi_t(t)$ je tvrdenie $\neg\sigma(t,t)$. Na druhej strane však $\varphi_t(t) \Leftrightarrow \sigma(t,t)$, čo je spor.

V tom istom roku dokázal Church, že dvojmiestny predikát $(\exists z)P(x,y,z)$, ktorý formalizuje dokázateľnosť tvrdení $\varphi_n(m)$ v Peanovej aritmetike, nie je rekurzívny. Peanova aritmetika je preto nerozhodnuteľná. Navyše z tohto dôkazu sa mu podarilo eliminovať špecifiká aritmetiky a dostať tak dôkaz nerozhodnuteľnosti predikátového počtu. Teda ani všetky tautológie predikátového počtu, t. j. vlastne logické zákony nemožno mechanicky rozpoznať. Korunu tomu všetkému nasadil výsledok Lászlóa Kalmára (mimochodom, najprominentnejšieho odporcu Churchovej tézy), podľa ktorého otázku rozhodnuteľnosti ľubovoľnej axiomatickej teórie možno previesť na s ňou ekvivalentnú otázku rozhodnuteľnosti nejakej vhodnej axiomatickej teórie s jediným dvojmiestnym základným predikátom. Ale to znamená, že v závere predošlej kapitoly spomínané výsledky o rozhodnuteľnosti výrokového počtu a predikátového počtu jednomiestnych vzťahov už nemožno posunúť ani o krôčik ďalej. Konečne Rosser si všimol, že s použitím Gödelových výsledkov možno Churchovu vetu o nerozhodnuteľnosti preniesť na ľubovoľnú teóriu, ktorá spĺňa požiadavky kladené na teóriu T. Inak povedané, Peanova aritmetika je podstatne nerozhodnuteľná, t. j. ani keď k nej pridáme nejaké ďalšie axiómy, pokiaľ sa to deje efektívne, stále nedostaneme rozhodnuteľnú teóriu. Teda pre našu teóriu T platí:

Churchova-Rosserova veta. Ak je teória T bezosporná, tak je nerozhodnuteľná.

Do dôkazu tejto vety sa už nebudeme púšťať; ostatne, ani sme si na to nepripravili potrebné prostriedky. Namiesto toho sa radšej pokúsime zhrnúť niektoré z práve uvedených výsledkov.

Pripomeňme, že
$$S = \{(m,n) \in \mathbb{N}^2\,;\ \varphi_n(m)\}.$$
Ďalej označme
$$D = \{(m,n) \in \mathbb{N}^2\,;\ (\exists z)P(m,n,z)\}.$$

Predpoklad o korektnosti logiky možno zachytiť inklúziou $D \subseteq S$, ktorá hovorí, že každé dokázateľné tvrdenie $\varphi_n(m)$ je pravdivé. Prvá Gödelova veta o neúplnosti potom hovorí, že $D \neq S$, teda že nie každé pravdivé tvrdenie je dokázateľné. Uvedomme si, že i v prípade $D \not\subseteq S$, by platilo $D \neq S$, no to by znamenalo, že v našej formalizácii sme už dávno zblúdili natoľko, že klásť si podobné otázky vôbec nemá zmysel.

Nerozhodnuteľnosť teórie T zase znamená, že množina D nie je rekurzívna. Z jej tvaru však okamžite vidno, že je aspoň rekurzívne spočítateľná. Inak povedané, dokázateľné tvrdenia nie sú síce mechanicky rozpoznateľné, no ešte stále (aspoň teoreticky) ich môžeme všetky postupne mechanicky generovať. No keďže všetky rekurzívne i rekurzívne spočítateľné množiny sú definovateľné v Peanovej aritmetike, vyplýva z Tarského vety, že S nie je ani rekurzívne spočítateľná, teda pravdivé tvrdenia nielenže nemôžeme mechanicky rozpoznať, no nemôžeme ich ani všetky postupne vyčerpať nejakým mechanickým procesom.

Poznamenajme ešte, že rekurzívna spočítateľnosť dvojmiestneho predikátu $(\exists z)P(x,y,z)$, t. j. vlastne mechanická generovateľnosť všetkých dokázateľných tvrdení má oveľa menší praktický význam, než by sa niekomu mohlo zdať na prvý pohľad. I keby sme vytvorili príslušný program, na základe ktorého by nám nejaký hypotetický počítač v dostatočne dlhom čase vypísal ľubovoľné z dokázateľných tvrdení, a naozaj spustili celý výpočet, naše poznanie by to príliš neobohatilo. Čoskoro by sme sa začali topiť v hŕbe dokázaných tvrdení, medzi ktorými by bolo niekoľko už dávno dobre známych, niekoľko zaujímavých nových, no drvivá väčšina takých, čo by nám vôbec nič nehovorili.

Pvoradá úloha matematického poznania nespočíva v triedení náhodných, hoci overených výsledkov, ale práve v matematizácii rôznych sfér javov, stanovovaní hypotéz o nich a dôkazoch či vyvráteniach takýchto *ľuďmi* vopred postavených hypotéz. Keby sme takúto hypotézu preverovali na našom počítači podľa spomínaného programu, zostávalo by nám len čakať so založenými rukami, kedy nám vypadne zo stroja, no odpovede by sme sa aj tak nemuseli dožiť. Len celkom výnimočne by nám pri niektorých, väčšinou veľmi jednoduchých a bez pomoci techniky rozhodnuteľných hypotézach vypadla v rozumnom čase odpoveď v podobe dokázaného tvrdenia alebo jeho negácie.

Hilbertov program formalizácie matematiky sa vo svojej pôvodnej podobe ukázal neudržateľný už po zverejnení Gödelových výsledkov v r. 1931 a vôbec nebolo treba čakať až do roku 1936 na ďalšie definitívne potvrdenie jeho zlyhania Tarským a Churchom. Nájsť preň v tom čase aspoň aké-také východisko znamenalo predovšetkým vypracovať nejaké ešte stále všeobecne prijateľné rozšírenie finitného stanoviska, v rámci ktorého by bolo možné dokázať aspoň bezospornosť Peanovej aritmetiky.

Dôkaz bezospornosti Peanovej aritmetiky skutočne podal, a kedyže inokedy ako r. 1936, Gerhard Gentzen (1909 - 1945), a to transfinitnou indukciou cez ordinálne čísla menšie než ε_0. Čitateľ, ktorý o nekonečných ordináloch nevie omnoho viac než to, čo sme o nich povedali v kapitole venovanej Cantorovi, asi nebude príliš náchylný považovať takúto metódu za „takmer finitnú”. Kvôli objektívnosti tu treba podotknúť, že ordinálne čísla menšie než ε_0 možno tiež zadať v podstate kombinatoricky, ako štruktúru voľne generovanú znakmi $0, 1$ a ω, uzavretú vzhľadom na operácie súčtu, súčinu a umocňovania, podriadené istým jednoduchým identitám. Taktiež ich možno modelovať prostredníctvom istej nie príliš zložitej množiny racionálnych čísel z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. To sú v podstate východiská, na ktorých možno vybudovať argumentáciu v prospech finitnosti Gentzenovho dôkazu. Vcelku však možno povedať, že diskusia o finitnom charaktere transfinitnej indukcie cez niektoré spočítateľné ordinály nie je uspokojivo uzavretá ani podnes.

Popri viacerých dôkazoch bezospornosti Peanovej aritmetiky, ktoré sa od hlavnej myšlienky Gentzenovho dôkazu príliš neodchýlili, zaujal diametrálne odlišný Gödelov dôkaz z r. 1958. Tento dôkaz využíval takzvané rekurzívne funkcionály, čo je pojem precizujúci efektívne operácie na rekurzívnych funkciách. Hoci aj Gödelova metóda podstatne prekračuje rámec pôvodného finitného stanoviska, jednako argumenty v prospech jej finitnosti sú aspoň na prvý pohľad ďaleko sugestívnejšie než u transfinitnej indukcie do ε_0. Ako sa však ukázalo, obe tieto metódy sú ekvivalentné, teda „rovnako finitné či infinitné".

Len na okraj poznamenajme, že uvedené dôkazy definitívne pochovali nádej dokázať konzervatívnosť rozšírenia „matematiky reálnych objektov" pomocou nekonečných množín. Už minimálne infinitné prostriedky – ako napr. dobre usporiadaná množina ordinálov menších než ε_0, či systém všetkých rekurzívnych funkcionálov – totiž umožňujú dokázať tvrdenie $\mathrm{Cons}_{\mathrm{PA}}$, nedokázateľné len čisto finitnými prostriedkami.

Zdá sa teda, že bezospornosť Peanovej aritmetiky by sme vo svetle spomínaných dvoch dôkazov, osvetľujúcich ju z dvoch rozličných stránok, mohli považovať za dostatočne overený fakt. Je však otázkou, čomu dôverovať väčšmi – bezospornosti

Peanovej aritmetiky samotnej, alebo jej dôkazom. Odpoveď je jednoznačná – PA využíva podstatne slabšie metódy a menej problematické predpoklady a má nádej na bezospornosť, i keby sa ukázalo, že napr. rozšírenie PA umožňujúce formalizovať transfinitnú indukciu do ε_0 (teda dokázať tiež tvrdenie $\mathrm{Cons}_{\mathrm{PA}}$), je sporné. I to je však len čiste hypotetická a krajne nepravdepodobná možnosť.

To, že bezospornosť Peanovej aritmetiky nemožno dokázať v nej samej, je skôr jej prednosťou než nedostatkom. Predstavme si, že by tvrdenie $\mathrm{Cons}_{\mathrm{PA}}$ bolo dokázateľné v PA. Bol by to dôvod dôverovať jej bezospornosti? Práve naopak, podľa druhej Gödelovej vety by to totiž znamenalo, že je sporná, a teda schopná dokázať čokoľvek. I keby sme však túto vetu nepoznali, dôverovať bezospornosti nejakej teórie len na základe toho, že v jej rámci možno sformulovať a dokázať tvrdenie o jej vlastnej bezospornosti, by nebolo o nič rozumnejšie než veriť v čestnosť a pravdovravnosť nejakého človeka len na základe jeho vlastného vyhlásenia, že je čestný a nikdy neklame. Teda obľúbené bonmoty niektorých „znalcov" typu: „Podľa druhej Gödelovej vety nikdy nebudeme vedieť, či aritmetika je alebo nie je bezosporná," pokojne môžeme vedno s Raymondom M. Smullyanom označiť za sprostosti.

Napokon ani Presburgerova aritmetika, o bezospornosti ktorej nepochybujeme ani najmenej, nie je vstave dokázať svoju vlastnú bezospornosť. Dokonca tvrdenie o jej bezospornosti nemožno v rámci nej samej ani sformulovať, nieto ešte dokázať. Toto tvrdenie, ktoré označíme $\mathrm{Cons}_{\mathrm{PrA}}$, možno sformulovať napr. v rámci Peanovej aritmetiky. Finitný dôkaz bezospornosti teórie PrA, spomínaný v závere predchádzajúcej kapitoly, možno potom sformalizovať ako dôkaz tvrdenia $\mathrm{Cons}_{\mathrm{PA}}$ v teórii

PA. Na tieto účely by sme dokonca vystačili aj s o niečo slabšou teóriou než PA, každopádne by však musela umožňovať násobenie prirodzených čísel, čiže podstatne presahovať PrA. Teda i naša dôvera v bezospornosť Presburgerovej aritmetiky sa v určitom zmysle zakladá na dôvere v Peanovu aritmetiku.

Ešte dodajme, že r. 1960 našiel Solomon Feferman isté tvrdenie, ktoré tiež môže poslúžiť ako prijateľná formalizácia bezospornosti Peanovej aritmetiky, a pritom je v tejto teórii dokázateľné. Na rozdiel od tvrdenia $\mathrm{Cons}_{\mathrm{PA}}$, Fefermanovo tvrdenie, ani žiadne dokázateľné tvrdenie o bezospornosti PA nemôže byť v rámci tejto teórie ekvivalentné s tvrdením tvaru $\neg(\exists x)Q(x)$, kde $Q(x)$ je primitívne rekurzívny predikát. Ale to znamená, že Peanova aritmetika môže v istom zmysle dokázať i vlastnú bezospornosť, len príslušné tvrdenie o jej bezospornosti nemôže mať príliš jednoduchý tvar.

Zaujímavé dôsledky dáva druhá Gödelova veta o neúplnosti v spojení s *Gödelovou vetou o úplnosti* predikátového počtu. Ak je totiž Peanova aritmetika bezosporná, tak podľa druhej Gödelovej vety o neúplnosti tvrdenie $\mathrm{Cons}_{\mathrm{PA}}$ je v nej nedokázateľné, čo je to isté ako bezospornosť teórie, ktorá vznikne z PA pridaním novej axiómy $\neg\mathrm{Cons}_{\mathrm{PA}}$, postulujúcej existenciu formálneho sporu v PA. Podľa Gödelovej vety o úplnosti má aj táto teória (hoci je ω-sporná) nejaký model M. To je potom model Peanovej aritmetiky, teda vlastne akási „množina prirodzených čísel", vybavená operáciami sčítania a násobenia, ktoré majú všetky obvyklé vlastnosti. Popri tom však v M platí $\neg\mathrm{Cons}_{\mathrm{PA}}$, teda realizuje sa v ňom spomínaný spor.

Trochu si zjednodušíme život, ak si uvedomíme, že tvrdenie $\neg\mathrm{Cons}_{\mathrm{PA}}$ je v rámci PA ekvivalentné s tvrdením $(\exists z)P(0,l,z)$, kde l je číslo formuly $x \neq x$. Formula $\varphi_l(0)$ totiž hovorí $0 \neq 0$,

teda jej dokázateľnosť je to isté ako spor v PA. Keďže v M platí $(\exists z)P(0,l,z)$, existuje nejaké $\mu \in M$ také, že $P(0,l,\mu)$. Pretože PA je bezosporná, žiaden z dôkazov $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$ nie je dôkazom sporného tvrdenia $0 \neq 0$. Preto μ nemôže byť žiadnym z čísel $0, 1, 2, 3, \dots,$ t. j. μ nie je „obyčajné" prirodzené číslo. Číslo μ je príkladom tzv. nekonečného alebo neštandardného prirodzeného čísla a príslušný „dôkaz" sporu Δ_μ je dôkazom nekonečnej dĺžky, čiže nie je to dôkaz v pravom slova zmysle.

Podobné „paradoxné" modely možno študovať z viacerých dôvodov, z ktorých tu spomenieme len dva. Tým prvým môže byť nebodaj akási nadmerná opatrnosť, plodiaca snahu pripraviť sa takýmto štúdiom na možnosť objavenia sporu v Peanovej aritmetike, či skôr hádam v podstatne silnejších axiomatických systémoch, ako napr. v Zermelovej-Fraenkelovej teórii množín. Niečím takým by totiž celá matematika bola poriadne zaskočená.

Druhý možný dôvod smeruje k aplikáciám. Štúdiom podobných modelov totiž testujeme použiteľnosť aparátu matematickej logiky na modely reálnych situácií, ktoré sú matematizované a axiomatizované síce so značnou, no stále iba približnou presnosťou. Potom pri tvrdeniach odvodených z takýchto axióm „pomerne krátkymi" dôkazmi možno očakávať dobrú zhodu so skutočnosťou a taktiež by nemal hroziť formálny spor. No pri záveroch odvodených „veľmi dlhými" dôkazmi je už potrebná značná opatrnosť. Ich spoľahlivosť, ako i zhoda so skutočnosťou môžu postupne klesať a nemožno vylúčiť ani formálny spor. Kľúčovým problémom, na ktorý matematika samotná nemôže dať odpoveď a ktorý preto treba riešiť v každej situácii osobitne, je otázka, aké veľké prirodzené čísla ešte môžeme považovať za „pomerne malé” a odkiaľ ich už musíme považovať za „veľmi veľké”.

Vráťme sa teraz k prvej Gödelovej vete o neúplnosti. Podobne ako nedokázateľnosť tvrdenia $\mathrm{Cons}_{\mathrm{PA}}$ v PA, ani dôkaz neúplnosti Peanovej aritmetiky nie je, aspoň na prvý pohľad, konečným ortieľom nad Hilbertovým programom. Ak je táto teória neúplná, tak to znamená len toľko, že jej axiómy prirodzené čísla dostatočne nevystihujú. Preto tvrdenia od týchto axióm nezávislé, o ktorých pravdivosti sme presvedčení, k nim treba pridať ako nové axiómy. Takýmto tvrdením je napríklad Gödelovo tvrdenie $\varphi_g(g)$ alebo Rosserovo $\varphi_r(r)$. Z prvej Gödelovej vety však vyplýva, že pokiaľ nové axiómy pridávame efektívne, tak výsledná teória bude i naďalej neúplná. I v nej totiž možno nanovo formalizovať dokázateľnosť a vyvrátiteľnosť obdobnými predikátmi $P'(x,y,z)$ a $R'(x,y,z)$ a zostrojiť analóg napr. Rosserovho tvrdenia. A v skutočnosti nové axiómy inak ako efektívne, t. j. vymenovaním nejakého ich konečného počtu alebo zadaním nejakej efektívnej schémy axióm, ani pridať nevieme.

Úplnosť teda môžeme dosiahnuť len do istej miery fiktívne, za cenu straty efektívnosti príslušného rozšírenia teórie PA. Pritom je známe, že ani transfinitným pridávaním stále nových Gödelových či Rosserových tvrdení svoj cieľ nedosiahneme. Neúplnosť Peanovej aritmetiky a mnohých ďalších teórií, totiž spočíva v akejsi „nerovnomernosti” dokázateľnosti v ich rámci. Presnejšie, ak je $\varphi(x)$ nejaká formula v jazyku teórie PA, tak z dokázateľnosti každého jednotlivého tvrdenia $\varphi(m)$, pre ľubovoľné $m \in \mathbb{N}$, ešte nevyplýva dokázateľnosť tvrdenia $(\forall x)\varphi(x)$. Trochu zjednodušene povedané, dôkazy tvrdení $\varphi(m)$ sa môžu pre rôzne m natoľko líšiť, že jednotný dôkaz tvrdenia $(\forall x)\varphi(x)$ z nich nijako nemožno zostaviť. Táto vlastnosť niektorých teórií sa nazýva ω-neúplnosť.

Na odstránení ω-neúplnosti založené zúplnenie Peanovej aritmetiky opísal S. Feferman r. 1962. Použil pritom transfinitnú indukciu cez ordinálne čísla menšie než istý limitný ordinál $\zeta \le \omega^{\omega^\omega}$ a zostrojil ňou transfinitnú postupnosť, axiomatických teórií $\{T_\alpha\,;\,\alpha < \zeta\}$ a postupnosť predikátov $\{P_\alpha(x,y,z)\,;\,\alpha < \zeta\}$ formalizujúcich dokázateľnosť v príslušných teóriách takých, že T_0 je PA a pre množiny ich axióm $\mathrm{Ax}(T_\alpha)$ platí

$$\mathrm{Ax}(T_{\alpha+1}) = \mathrm{Ax}(T_\alpha) \cup \{\psi_n^\alpha\,;\,n \in \mathbb{N}\} \qquad \text{pre každé } \alpha < \zeta,$$
$$\mathrm{Ax}(T_\lambda) = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathrm{Ax}(T_\alpha) \qquad \text{pre limitné } \lambda < \zeta,$$

kde ψ_n^α označuje tvrdenie

$$(\forall x)(\exists z)P_\alpha(x,n,z) \;\Rightarrow\; (\forall x)\varphi_n(x)$$

Teda pridaním axiómy ψ_n^α sa v teórii $T_{\alpha+1}$ zaručí dokázateľnosť tvrdenia $(\forall x)\varphi_n(x)$, len čo je pre každé m tvrdenie $\varphi_n(m)$ dokázateľné v teórii T_α. Nakoniec sa ukáže, že teória $\mathbf{T}$ taká, že

$$\mathrm{Ax}(\mathbf{T}) = \bigcup_{\alpha<\zeta} \mathrm{Ax}(T_\alpha)$$

je nielen ω-úplná, ale i úplná. A keďže z ω-úplnosti a bezospornosti už jednoducho vyplýva ω-bezospornosť, teória $\mathbf{T}$ je tiež ω-bezosporná (samozrejme, ak je bezosporná PA).

Ako obrazne hovorí Jurij I. Manin vo svojom *Vypočítateľnom a nevypočítateľnom*: «Ak teda veríme Peanovym axiómam, tak, ak chceme postihnúť pravdivosť aritmetických formúl v celej jej úplnosti, prichodí nám ešte zavŕšiť transfinitnú postupnosť vyznaní viery, že už predošlé akty viery neboli poblúdením.»

Iné príklady takýchto „transfinitných vyznaní viery”, tentoraz však v bezospornosť teórie ZF či ZFC, sú ukryté v axiómach postulujúcich existenciu rôznych veľmi veľkých kardinálnych čísel. Onen obrovský kardinál, o ktorom sme sa letmo zmienili v súvislosti s axiómou determinovanosti na konci siedmej kapitoly, však predstavuje postupnosť nepomerne „transfinitnejšiu” než práve popísaná teória **T**.

Jednako „teória” **T** nie je teóriou v pravom slova zmysle, lebo ani jej axiómy nevieme efektívne rozpoznať. Dokazovať v nej vlastne nevieme, vieme len dokazovať tvrdenia o dokázateľnosti v teórii **T**. To sa však už musí diať v nejakej silnejšej teórii, v ktorej možno formalizovať indukciu až po ordinál ζ, na čo stačí napr. pomerne malý fragment teórie ZF. Úplnosť teórie **T** teda vieme zase dokázať iba v tejto silnejšej teórii. No na takúto dokázateľnosť tvrdení o dokázateľnosti sa už opäť vzťahujú Gödelove vety. Jednako možnosť neefektívne dokázať i to, čo vlastne efektívne dokázať nemožno, treba považovať za jeden z najvýznamnejších metodologických prínosov teórie množín. Práve používanie takýchto metód je rysom, ktorý najvýraznejšie odlišuje matematiku dvadsiateho storočia od celej matematiky dovtedajšej.

Možno sa tiež pokúsiť brať neúplnosť Peanovej aritmetiky na ľahkú váhu. Veď nezávislé tvrdenia ako $\varphi_g(g)$ či $\varphi_r(r)$ majú natoľko umelý charakter, že v bežnej matematickej praxi nemáme najmenší dôvod klásť si otázku ich dokázateľnosti. Ešte stále nie je vylúčené, že na rozhodnutie ľubovoľného „zmysluplného” aritmetického tvrdenia by Peanove axiómy mohli plne stačiť. Vďaka výsledkom, ktoré v sedemdesiatych rokoch publikovali J. Paris, L. Harrington a L. Kirby, však už dnes poznáme celý rad pomerne prirodzených a celkom zmysluplných

tvrdení kombinatorického charakteru, nezávislých od axióm Peanovej aritmetiky.

Ponúka sa ešte jedno pragmatické východisko, v ktorého možnosť veril i Gödel vo vzťahu nielen k aritmetike, ale aj – a to najmä – vo vzťahu k teórii množín. Podľa neho kritériom prijatia nejakého nezávislého tvrdenia ako novej axiómy by mohla byť jeho „úspešnosť”, t. j. zjednodušenie dôkazov už vopred i bez neho overených tvrdení. Jednako, ako ukázal sám Gödel ešte roku 1936, ak pridáme k teórii T ľubovoľné, od jej axióm nezávislé tvrdenie ako novú axiómu, tak možno nájsť tvrdenia teórie T, ktorých najjednoduchší dôkaz v pôvodnej teórii bude, voľne povedané, ľubovoľne mnohokrát zložitejší než najjednoduchší dôkaz tohto tvrdenia využívajúci novú axiómu. Navyše v každej takejto teórii T možno nájsť tvrdenia, ktorých najjednoduchší dôkaz je ľubovoľne mnohokrát zložitejší než toto tvrdenie samo.

Celkovo teda možno povedať, že tak samotný Hilbertov program, ako i kroky podniknuté na jeho inováciu a záchranu, ani neskoršie výsledky, vrhajúce nové svetlo na jeho ciele a ním položené otázky, mu nezabezpečili tú všeobecnú presvedčivosť, o ktorú toľko usiloval, raz navždy pošramotenú začiatkom tridsiatych rokov. Nuž sotva možno čakať, že jeho argumenty primäjú niekoho radikálne zmeniť svoju naladenosť voči rôznym poňatiam matematiky a napríklad konvertovať od intuicionizmu k formalistickému poňatiu teórie množín.

Najvýznamnejšie závery filozofického dosahu, ktoré sa zo skôr uvedených negatívnych výsledkov tradične vyvodzujú, možno heslovite zhrnúť v niekoľkých vetách. Vo svetle Gödelových, Tarského a Churchových objavov sa matematické poznanie javí ako otvorený proces tvorivého charakteru, ktorý nemožno nijako zavŕšiť, keďže v každom dielčom okamihu sa vyznačuje neúplnosťou. Navyše toto poznávanie nemožno vopred poistiť pred omylmi a spormi. Toto poznávanie sa môže k pravde len blížiť, no nikdy ju nemôže celkom vyčerpať, lebo pravda je svojou povahou obsažná, a nie formálna. Konečne, tvorivú matematickú činnosť nemožno zredukovať na nijaké mechanicky vykonávané úkony, ktoré by bolo možné prenechať čo ako dokonalému stroju. Teda koľkokoľvek umu a dôvtipu by sme na to vynaložili, stále sa nám nepodarí zbaviť sa nevyhnutnosti používať svoj um a dôvtip.

Tu treba dodať, že tieto tézy sa nevzťahujú len na matematické poznanie, ale na ľudské poznanie vôbec. Ťažkosti však môžu vzniknúť, keď na základe exaktne dokázaných Gödelových, Tarského a Churchových výsledkov chceme i týmto tézam pririeknuť status matematických teorém. Videli sme, že ani v samotnej matematike také niečo neobstojí. Celý rad iných výsledkov, napr. spomínané dva Fefermanove, totiž platnosť našich téz značne relativizuje. A to sme pritom ponechali stranou rôzne výhrady, ktoré by vyplynuli z odmietnutia Churchovej tézy. Takisto sa tu nechceme púšťať – pri dnešnom stave poznania – do potenciálne nekonečných diskusií okolo otázok typu: „Čo je to vlastne stroj?", „Môžu stroje (tvorivo) myslieť?", „Je človek mysliaci stroj?" a pod.

A už tobôž nemôžeme čitateľa ani dosť varovať pred pokusmi „aplikovať" podobné závery mimo matematiky. To môže viesť od „dokazovania" síce správnych a filozoficky podnetných téz, ako napríklad o nevyhnutnej neúplnosti systému poznatkov ľubovoľnej vednej disciplíny a z toho vyplývajúcej potrebe hľadania ciest na prekonanie jeho úzkeho rámca, ktoré však z Gödelových viet nijako nevyplývajú, až po také trápne smiešnosti a banality, s akými sa človek môže stretnúť v snobských debatách niektorých intelektuálov, kde zdravému rozumu bezprostredne jasný záver, že napríklad umelecké dielo možno náležite hodnotiť len z akéhosi odstupu či nadhľadu a v širšom kontexte, t. j. v „odskoku zo systému", nie však ponorený do jeho tvorby, vyplýva opäť, z čohože iného, ako z Gödelovej vety.

Vari netreba ani zvlášť podotýkať, že vzťah je tu práve opačný. Spomínané matematické vety sú len veľmi špeciálnym, hoci najprecíznejšie sformulovaným a najrigoróznejšie dokázaným prejavom onoho všeobecného dialektického filozofického princípu. Na druhej strane však to, že tento princíp tak presvedčivo potvrdzujú, ešte nijako neznamená, že z neho logicky vyplývajú.

Ale vráťme sa k matematike. Tu by nás neúplnosť základných axiomatických systémov mala primäť s väčšou pozornosťou a vážnosťou počúvať varovné hlasy intuicionistov. Vo svetle Gödelových výsledkov sa totiž skôr spomínaná tendencia formalizácie matematického poznania vymykať sa z vopred zamýšľaného rámca javí nie ako náhodná, lež celkom zákonitá. To by nás malo viesť prinajmenšom k istej opatrnosti pri úvahách o nekonečných oboroch a množinách a taktiež k dôkladnejšiemu posúdeniu použiteľnosti zákona vylúčenia tretieho a neefektívnych metód vôbec v rôznych oblastiach matematiky.

No ani zrieknutie sa zákona vylúčenia tretieho ani celá intuicionistická redukcia klasickej logiky nezväčšuje nádeje Peanovej aritmetiky na bezospornosť. Ako dokázal sám Gödel r. 1933, pokiaľ v PA nemožno odvodiť spor len prostriedkami intuicionistickej logiky, tak ho nemožno odvodiť ani prostriedkami klasickej logiky. Teda intuicionistická bezospornosť Peanovej aritmetiky už stačí zaručiť aj jej klasickú bezospornosť a tiež naopak, ak je PA sporná klasicky, tak je sporná aj intuicionisticky.

Ešte nám zostáva zamyslieť sa nad otázkou, čo bolo na spomínaných objavoch také prekvapivé. Veď vo svetle učenia celej jednej vývojovej línie filozofického myslenia, ktorú nazývame dialektickou, sa vlastne také niečo dalo čakať. Prečo teda Gödelove vety o neúplnosti a ich dozvuky – veta Tarského a Churcha – zapôsobili tak ohromujúco? Znamenali totiž, po páde mechanistického názoru vo fyzike a filozofii, definitívny pád *poslednej* bašty večných, nemenných a neotrasiteľných právd a istôt, za akú matematici svoju vedu považovali (a poniektorí pštrosi medzi nimi dodnes považujú). Tým stratila matematika nielen svoje výsadné postavenie, vierou v ktoré sa živila, no i nádej niekedy ho v pôvodnej podobe opäť oživiť a získať, a bola naveky odsúdená k údelu ostatných vied smrteľníkov: zdieľať s ľudským poznaním jeho nedokonalosť a nedokonanosť, nemožnosť stanoviť čokoľvek s konečnou platnosťou, k údelu musieť sa navracať vždy poznovu a prehodnocovať svoje „staré” pravdy, ktoré by tak rada považovala za večné. I matematické poznanie sa totiž deje bez predbežnej záruky jeho bezospornosti. Nad matematikou tak, napriek vcelku uspokojivému rozriešeniu paradoxov teórie množín, naveky zavisol Damoklov meč objavenia sporov.

Kríza z prelomu storočí teda nebola niečím náhodným, ale zákonitým plodom vývoja matematického myslenia. Uvedomenie si tejto skutočnosti v súvislosti s druhou Gödelovou vetou tak uvrhlo matematiku do akejsi permanentnej krízy, z ktorej sa jej podnes nebolo súdené vymaniť. Keby sme teda pri posudzovaní jej súčasného stavu vychádzali z tézy Martina

Heideggera, podľa ktorej stupeň rozvoja tej-ktorej vednej disciplíny možno hodnotiť mierou, do akej je vôbec schopná krízy svojich vlastných základov, mohli by sme mať všetky dôvody k spokojnosti.

Pri takomto pohľade nám spojenie slova kríza s obdobím dosiaľ najvyššej konjunktúry množinovej matematiky v štyridsiatych až šesťdesiatych rokoch, ako i súčasným búrlivým rozvojom matematiky, prudkým rastom počtu jej odvetví a sily jej aplikácií už nebude pripadať natoľko paradoxné. Jednako ani k príliš bujarému nadšeniu nám súčasnosť mnoho dôvodov neskýta. Aby sme to však objasnili, tak si po otázke, prečo Gödelove a ďalšie objavy zapôsobili tak, ako zapôsobili, musíme ešte položiť otázku, čo vlastne spôsobili a čo mali spôsobiť, ale nespôsobili.

Predovšetkým mali matematikov vyprovokovať k rozpracovaniu hlbších pohľadov na predmet matematického poznania a základy svojej vedy, k čomu však došlo len sčasti a v miere nie celkom dostatočnej. Ďalej ich mali viesť k väčšej starostlivosti a zodpovednosti za bezospornosť a prípustnosť základných implicitných a predaxiomatických predpokladov, z ktorých vychádzajú pri svojich abstrakciách. Namiesto toho však v matematike zavládla dovtedy nevídaná bezstarostnosť a ľahkomyseľnosť. Možno povedať, že bremeno zodpovednosti za bezospornosť celej matematiky, ktorého ťarchu ešte Hilbert plne pociťoval, Gödel akoby naraz sňal z pliec ďalšej generácie. Veď ak bezospornosť matematiky nemožno dokázať, tak sa vlastne nedá nič robiť. Otázka bezospornosti bola v dôsledku toho nahradená otázkou relatívnej bezospornosti, dokonca ani nie voči aritmetike, ale rovno voči niektorému dosť silnému axiomatickému systému teórie množín (napr. ZF).

No z *Gödelovej vety o úplnosti* potom vyplýva, že dovolené je všetko mysliteľné (a ak je ZF sporná, tak absolútne všetko). Lenže ani bezospornosť teórie ZF nemôže množinovej matematike zaručiť jej zmysel, ak je bežnou praxou, že každý si predpíše axiómy, aké mu na um zídu, nájde si nejaké ich množinové modely, študuje si ich do vôle a o ostatné sa nestará. Z čisto formálneho hľadiska sú totiž všetky takéto systémy axióm a ich modely rovnako oprávnené.

To vedie k zhubnému bujneniu neprehľadných vetiev najrôznejších matematických disciplín, z ktorých väčšina je zrozumiteľná už len hŕstke špecialistov sediacich na jednom konári. Mnohí z nich síce môžu mať pocit, že uprostred Cantorovho raja vystupujú čoraz vyššie po konároch stromu poznania a živia sa jeho sladkým ovocím, no pri pohľade zvonku súčasná matematika čoraz väčšmi pripomína babylonskú vežu a dnešní matematici jej staviteľov, z ktorých jeden už nerozumie reči druhého.

Je trpkou iróniou, že táto strata spoločnej reči, ktorá je najmarkantnejším prejavom už spomínanej krízy množinovej matematiky, ide čiastočne na vrub teórie množín, ktorá práve mala byť tým univerzálnym jazykom všetkej matematiky, ktorý mal zaručiť jej jednotu.

Autor si plne uvedomuje, že problém, do ktorého práve zabŕdol, možno zmysluplne posúdiť len v podstatne širších súvislostiach, než na aké poskytuje priestor téma našich úvah. Spomínané krízové javy a priliehavosť prirovnania k stavbe babylonskej veže nie sú nejakou špecialitou matematiky. Naopak, sú charakteristické pre takmer celú vedu druhej polovice dvadsiateho storočia a do značnej miery sú podmienené sociálne.

Strata spoločnej reči, a často i zmyslu, nielen vo vede ako celku, ale aj v pomerne úzkych vedných odvetviach a pododvetviach je, zdá sa, nevyhnutným sprievodným javom stále postupujúcej a rozvetvujúcej sa špecializácie, ktorá je však len čiastočne vyvolaná potrebami rozvoja príslušných vedných disciplín a neslúži len pokroku poznania, o raste blahobytu ani nehovoriac. V nemalej miere je tiež vyvolaná tvrdou konkurenciou, bojom o pozície a profesionálne i ekonomické prežitie, ako aj o rozhodovací vplyv a zdroje financovania výskumu vo vnútri gigantickej armády vedeckých pracovníkov. Potreba „objektívnych” kritérií hodnotenia vedeckej práce prináša obrovský publikačný a citačný tlak, a tak armáda vedcov chrlí hory vedeckých prác, v ktorých je v množstve humbugu a balastu čoraz ťažšie nájsť zrnká naozajstného poznania. Asi to inak nejde – aj pri ryžovaní zlata vznikajú haldy hlušiny. A ak chceme podporovať „dobrú” vedu, musíme podporovať aj „zlú”, lebo neexistuje nijaký efektívny spôsob, ako ich oddeliť. Pritom pod „dobrou” vedou nerozumieme len takú, ktorá prináša bezprostredný zisk a hmotný úžitok.

Keďže ide o všeobecnú tendenciu, bolo by absurdné zvaľovať zodpovednosť za jej konkrétne prejavy v matematike len na prevládajúcu teoreticko-množinovú paradigmu. Na tomto mieste sme chceli iba zdôrazniť, že teória množín – popri priestore na sprítomnenie väčšiny študovaných štruktúr – poskytuje matematike aj živnú pôdu, na ktorej sa spomínaným krízovým javom môže výborne dariť a dovoľuje väčšine matematikov tváriť sa, že sa nič nedeje.

Netrúfame si z tohoto miesta navrhovať východiská zo spomínanej krízy ani pre matematiku samotnú, nieto ešte pre celok súčasnej vedy, jednako si však dovolíme vyvodiť niektoré závery z pomerne dávneho objavu klasickej teórie množín známeho pod názvom Skolemov paradox. Ten sa zakladá na takzvanej Löwenheimovej-Skolemovej vete, ktorú r. 1919 dokázal Thoralf Skolem zovšeobecnením jedného výsledku Leopolda Löwenheima z r. 1915. Podľa tejto vety v ľubovoľnom množinovom modeli nejakej axiomatickej teórie možno nájsť jej spočítateľný podmodel. Hoci táto veta bola neskôr prekrytá silnejšou Gödelovou vetou o úplnosti, Skolemov paradox bol objavený zároveň s ňou. Tu uvedieme len jednu z jeho možných podôb.

Ak je teória ZF bezosporná, tak má i nejaký spočítateľný model. Tento model pozostáva z nejakého množinového univerza V, ktorého prvky sú teraz pre nás jedinými „množinami" a z nejakej relácie E na V, ktorá predstavuje vzťah náležania $x \in y$. Navyše, ako vyplýva z vety o kolapse, ktorú dokázal Andrzej Mostowski, V a E možno voliť tak, že každá „množina" $x \in V$ je i podmnožinou V a pre $x, y \in V$ platí $(x, y) \in E \Leftrightarrow x \in y$. V modeli (V, E) možno teraz obvyklým spôsobom vybudovať celú množinovú matematiku. Napríklad možno v ňom nadefinovať „množinu $\mathbb{N}$ všetkých prirodzených čísel", „množinu $\mathbb{R}$ všetkých reálnych čísel" aj „množiny" väčších mohutností. Pri pohľade zvonku však pre tieto „množiny" platí $\mathbb{N} \subseteq V$, $\mathbb{R} \subseteq V$, čiže $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$ sú obe spočítateľné, teda ekvivalentné množiny. Do konca celé univerzum V je pri takomto pohľade ekvivalentné s $\mathbb{N}$.

Zrejme Skolemov paradox nie je logickým sporom. Pri pohľade znútra totiž vo (V, E) platia všetky tvrdenia dokázateľné v ZF. Napríklad „množina $\mathbb{R}$ je nespočítateľná", t. j. neexistuje vzájomne jednoznačné zobrazenie $f \in V$ množiny $\mathbb{N}$ na množinu $\mathbb{R}$. Jednako nás však tento paradox upozorňuje na relatívnosť takých pojmov ako spočítateľnosť a nespočítateľnosť

a vôbec pojem kardinálneho čísla nekonečnej množiny. Teda existenciu nekonečných kardinálov nemusíme nutne chápať ako niečo absolútne a objektívne, ale môžeme si ju vykladať aj modelovo, ako nedostatočnosť oboru všetkých zobrazení daného univerza. Pri pohľade zvonku totiž nijakú škálu nekonečných kardinálov nevidno, všetky nekonečné množiny sú navzájom ekvivalentné. Ale to je predsa náš starý známy Bolzanov princíp ekvivalencie nekonečných množín, ktorý – vyhodený z Cantorovej teórie množín oknom – vracia sa do nej v podobe Skolemovho paradoxu dvermi.

Bolzanovo poňatie teórie množín by jej vari mohlo zaručiť onen skromnejší, no istejší zmysel, ktorý stratila na potulkách nesmiernymi priestormi Cantorovho raja. Bolo by naivné domnievať sa, že práve ono, i keby bolo všeobecne prijaté, by mohlo vyviesť matematiku ako jedinú z krízy typickej pre celok súčasnej vedy a už tobôž prekonať túto krízu v plnom rozsahu. Rozvinutie Bolzanovho poňatia a rozpracovanie matematiky v jeho rámci by však mohlo, pokiaľ je v tomto smere vôbec nejaká nádej, k tomu svojou troškou prispieť. Z ambicióznych cieľov alternatívnej teórie množín, ktorá jedným zo svojich východísk a vedúcich zámerov na Bolzana vedome nadväzuje, vyhlásených jej tvorcom Petrom Vopěnkom, je však reálne dosiahnuteľným maximom len toto ich uvedené skromné minimum. Ukázať, ako si alternatívna teória množín na svojej ceste počína a ako sa jej darí či nedarí napĺňať jej ciele, už nie je témou tejto knižky.

Na záver by sa asi patrilo rozlúčiť sa s čitateľom nejakým poučením. Autorovi sa však do toho príliš nechce. Nuž azda len toľko:

Čo ako by sme si to želali, zrejme neexistuje to jediné a „pravé” poňatie matematiky, ktorého prijatie by nám zaručilo jej zmysluplnosť a pravdivosť a zbavilo by nás zodpovednosti za ich neustále hľadanie. Naše presvedčenie a svetonázorové orientácie nám pri tom môžu byť nápomocné, pokiaľ ich nepovýšime na dogmy a zachováme si oči, uši a mysle otvorené voči iným názorom. Taktiež mimomatematické podnety a aplikácie smerujúce mimo matematiky nás môžu v mnohom inšpirovať.

No stáročná skúsenosť učí, že najefektívnejším kritériom zmysluplnosti a pravdy vo vede všeobecne a v matematike zvlášť je zároveň jedno z najsubjektívnejších – kritérium estetické. Pod toto kritérium spadá vnútorná krása a symetria nejakej teórie i krása širšieho celku, ktorý sa dotvára až jej rozpracovaním a zaradením na to pravé, dosiaľ prázdne miesto v majestátnej budove matematiky a prepojením dovtedy zdanlivo nesúvisiacich častí. «Nepochopiteľnú efektívnosť matematiky v prírodných vedách», o ktorej hovorí Eugen P. Wigner, ako aj jej aplikácie v iných oblastiach, či jednej matematickej teórie v druhej, – najmä tie prekvapivé, nečakané a vopred nezamýšľané – možno opäť chápať ako niektoré stránky jej krásy i pravdivosti. Všetko to činí matematiku podobnú objavovaniu nových, neznámych svetov, i umeleckej tvorbe zároveň.

Mnoho múdrych ľudí si už lámalo hlavy v snahe vysvetliť, ako je to možné. A hoci nám pri tom zanechali hodne bystrých a prenikavých postrehov i krásnych a hlbokých úvah a myšlienok, nik z nich nepodal jednoduchšie a jednoliatejšie vysvetlenie ako dávno pred nimi náš starý, dobrý Platón svojou víziou o súrodosti ideí krásy, dobra a pravdy.

Literatúra

d’Alembert, J. B. R.: *Esej o základoch filozofie*. Pravda, Bratislava 1981

Archangeskij, A. V.: *Kantorovskaja teorija množestv*. Izdatestvo Moskovskogo universiteta, Moskva 1988

Aristoteles: Organon (*Kategorie, O vyjadřování, První analytiky, Druhé analytiky, Topiky, O sofistických důkazech*). Akademia, Praha 1958-78

Aristoteles: *Metafyzika*. Česká akademie vied a umění, Praha 1972

Balcar, B., Štěpánek, P.: *Teorie množin*. Academia, Praha 1986

Barwise, J. (ed.): *Handbook of Mathematical Logic*. North-Holand, Amsterdam 1977 (ruský preklad s dodatkami v štyroch zväzkoch: Spravočnaja kniga po matematičeskoj logike. Nauka, Moskva 1982-83)

Beľajev, E. A., Perminov, V. Ja.: *Filozofické a metodologické problémy matematiky*. Pravda, Bratislava 1984

Bergson, H.: *Filozofické eseje*. Slovenský spisovateľ, Bratislava 1970 (výber z diela)

Berka, K., Kreiser, L. (eds.): *Logik – Texte, Kommentierte Auswahl zur Geschichte der modernen Logik*. Akademie-Verlag, Berlin 1983

Beth, E. W.: *The Foundations of Mathematics*. Harper and Row, New York 1966

Beth, E. W.: *Mathematical Thought. An Introduction to the Philosophy of Mathematics*. D. Reidel, Dordrecht, Holland 1965

Birjukov, B. V., Trostnikov, B. N.: *Žar cholodnych čisel i pafos besstrastnoj logiki.* Znanie, Moskva 1977

Blažek, J., Kussová, B., Vopěnka, P.: *Množiny a přirozená čísla.* Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1977

Bolzano, B.: *Vědosloví.* Academia, Praha 1981

Bolzano, B.: *Paradoxy nekonečna.* Academia, Praha 1963

Bourbaki, N.: *Očerki po istorii matematiki.* Izd. inostrannoj literatury, Moskva 1963 (ruský preklad knihy *Eléments d'histoire des mathématiques* a eseje *L'archicture des mathématiques*)

Brouwer, L. E. J.: *Collected Works.* (Heyting, A. ed.), North-Holand, Amsterdam 1975

Bukovský, L.: *Štruktúra reálnej osi.* Veda, Bratislava 1979

Bukovský, L.: *Množiny a všeličo okolo nich.* Alfa, Bratislava 1985

Cantor, G.: *Gesammelte Abhandlugen mathematischen sowie philosophischen Inhalts. Mit erläuternden Anmerkungen sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor – Dedekind.* (Zermelo, E. ed.), Springer-Verlag, Berlin 1932 (ruský preklad: *Trudy po teorii množestv.* Nauka, Moskva 1958)

Carnap, R.: *Problémy jazyka vědy.* Svoboda, Praha 1968 (výber z prác)

Cohen, P. J.: *Set Theory and the Continuum Hypotesis.* W. A. Benjamin, New York 1966 (ruský preklad: *Teorija množestv i kontinuum gipoteza.* Mir, Moskva 1969)

Cohen, P. J., Hersh, R.: Set Theory. *Scientific American,* Dec. 1967, 104-116

Cutland, N.: *An Introduction to Recursive Function Theory.* Cambridge Univ. Press, Cambridge 1980 (ruský preklad: Mir, Moskva 1983)

Čechák,V., Berka, K., Zapletal, I.: *Co víte o moderní logice.* Horizont, Praha 1981

Čechák, V. a kol.: *Co víte o starověké a středověké filozofii.* Horizont, Praha 1983

Čechák,V., Sobotka, M., Sus, J.: *Co víte o novověké filozofii.* Horizont, Praha 1984

Dauben, J.: *Georg Cantor – His Mathematics and Philosophy of the Infinite.* Harvard Univ. Press, Cambridge, MA, 1979

Davis, M.: *Computability and Unsolvability.* McGraw-Hill, New York 1958

Davis , M. (ed.): *The Undecidable.* Raven Press, New York 1965

Davis, M.: *Applied Nonstandard Analysis.* J. Wiley, New York 1977 (ruský preklad: *Prikladnoj nestandartnyj analiz.* Mir, Moskva 1980)

Dawson, J. W.: Zaostřeno na Kurta Gödela. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* **31** (1986), 264-274

Dedekind, R.: *Was sind und was sollen die Zahlen?* Vieweg, Braunschweig 1930 (prvé vydanie 1888)

Descartes, R.: *Rozprava o metodě.* J. Laichter, Praha 1947

Descartes, R.: *Princípy filozofie.* Pravda, Bratislava 1986

Dragalin, A. G.: *Matematičeskij intuicionizmus – Vvedenie v teorijie dokazateľstv.* Nauka, Moskva 1979

Euklides: *Základy.* Jednota českých matematiků, Praha 1907

Feferman, S.: Transfinite Recursive Progressions of Axiomatic Theories. *J.Symb. Logic* **27** (1972), 259-316

Felgner, U.: *Zur Geschichte des Mengenbegriffs.* Tübingen 1993 (preprint)

Feuerbach, L.: *Podstata křesťanství.* Státní nakladatelství politické literatury, Praha 1954

Fraenkel, A., Bar-Hillel, J.: *Foundations of Set Theory.* North-Holland, Amsterdam 1958 (ruský preklad: *Osnovy teorii množestv.* Mir, Moskva 1966)

Fuchs, E. a kol.: *Světonázorové problémy matematiky* IV. Ped. fak. UJEP Brno, Státní ped. nakladatelství, Praha 1987

Gandy, R. O.: Church's Thesis and Principles for Mechanism. In Barwise,J., Keisler, H. J., Kunen, K. (eds.): *The Kleene Symposium.* North-Holland, Amsterdam 1980, pp. 123-148

Gentzen, G.: Die Wiederspruchsfreiheit der reinen Zahlen Theorie. *Math. Ann.* **112** (1936), 493-565

Gentzen, G: *The collected papers of Gerhard Gentzen.* (Szabo, M. E., ed.), North-Holland, Amsterdam 1964 (anglicko-nemecké vydanie)

Giordano Bruno: *Dialogy*. Státní nakladatelství politické literatury, Praha 1956

Gödel, K.: Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. *Monafshefte f. Math. und Phys.* **37** (1930), 349-360

Gödel, K.: Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte f. Math. und Phys.* **38** (1931), 173-198

Gödel, K.: Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie. *Ergebnisse eines math. Kolloq.* **4** (1933), 34-38

Gödel, K.: Über die Länge von Beweisen. *Ergebnisse eines math. Kolloq.* **7**(1936), 23-24

Gödel, K.: The Consistency Proof of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A* **24** (1938), 556--557

Gödel, K.: Consistency of the generalized Continuum Hypothesis. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A* **25** (1939), 220-225

Gödel, K.: The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with Axioms of Set Theory. *Annals of Math. Studies* **3**, Princeton 1940

Gödel, K.: Russell's mathematical logic. In: P. A. Schlipp (ed.): *The Philosophy of Bertrand Russell*. Northwest. Univ. Press, Chicago 1944, 123--153

Gödel, K.: What is Cantor's Continuum Problem? *Amer. Math. Monthly* **54** (1947), 515-525

Gödel, K.: Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes. *Dialectica* **12** (1958), 280-287

Gödel, K.: *Ontological Proof*. Rukopis z pozostalosti, 1 str.

Gödel, K.: *Collected works* I, II. (S. Feferman et al., eds.), Clanderon Press, Oxford Univ. Press, New York 1986 (angliko-nemecké vydanie).

Goldblatt, R.: *Topoi, The Categorical Analysis of Logic*. North-Holland, Amsterdam 1979 (ruský preklad: *Toposy, Kategornyj analiz logiki*. Mir, Moskva 1983)

Gorfunkel, A. C.: *Renesanční filozofie*. Svoboda, Praha 1987

Hegel, G. W. F.: *Logika ako veda* I, II. Pravda, Bratislava 1977

Heat, Th.: *A History of Greek Mathematics*. Oxford Univ. Press, Oxford 1921

Heidegger, M.: *Sein und Zeit, Gesamtausgabe,* I. *Abteilung, Band 2,* Klostermann, Frankfurt a/M 1977 (český preklad: *Bytí a čas,* §§1-53, sešitové vydání. Samizdat, Praha 1981-88)

Heijenoort van, J. (ed.): From Frege to Gödel, *A Source Book in Math. Logic*. Harvard Univ. Press, Cambridge, MA 1971

Heyting, A.: *Intuitionism*. North-Holland, Amsterdam 1956 (ruský preklad: *Intuicionizm*. Mir, Moskva 1985)

Hilbert, D.: *Grundlagen der Geometrie*. Teubner-Verlag, Leipzig 1930. (prvé vydanie 1899)

Hilbert, D.: Über das Unendliche. *Math. Ann.* **95** (1925), 161-190

D. Hilbert, W. Ackermann: *Grundzüge der theoretischen Logik*. Spinger-Verlag, Berlin 1928

Hilbert, D., Bernays, P.: *Grundlagen der Mathematik* I, II. Springer-Verlag, Berlin 1968, 1970 (2. vydanie) (ruský preklad: *Osnovania matematiki* I, II. Nauka, Moskva 1979, 1982)

Hofstädter, D. R.: *Gödel, Escher, Bach – An Eternal Golden Braid.* Penguin Books, London 1982

Hume, D.: *Zkoumání lidského rozumu*. Svoboda, Praha 1972

Husserl, E.: *Logische Untersuchungen* I, *Prologomena zur seinen Logik,Husserliana* XVIII. Nijhoff, Haag 1975

Husserl, E.: *Ideen zu einer Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie, Husserliana* III/1. Nijhoff, Haag 1976

Husserl, E.: *Krize europských věd a transcendentální fenomenologie*. Academia, Praha 1972

Chandrasekhar, S.: Krása a hľadanie krásy vo vede. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* **31** (1986), 193-202

Iľjenkov, E. V.: *Dialektická logika*. Pravda, Bratislava 1977

Ideľson, A. V., Minc, G. E. (eds.): *Matematičeskaja teorija logičeskogo vyvoda*. Nauka, Moskva 1967 (zborník prekladov)

Kalmár, L.: An Argument against the Plausibility of Church's Thesis. In Heyting, A. (ed.): *Constructivity in Mathematics, Proccedings of theColloquium held in Amsterdam* 1957. North-Holland, Amsterdam 1954

Kant, I.: *Kritika čistého rozumu*. Pravda, Bratislava 1979

Kant, I.: *Kritika praktického rozumu*. Spektrum, Bratislava 1990

Kant, I.: *Kritika soudnosti.* Odeon, Praha 1975

Kelemen, J.: *Myslenie, počítač . . .*. Spektrum, Bratislava 1989

Kessidi, F. Ch.: *Od mýtu k logu*. Pravda, Bratislava 1976

Kleene, S. C.: *Introduction to Metamathematics*. Van Nostrand, New York 1952 (ruský preklad: *Vvedenie v metamatematiku*. Izd. inostrannoj literatury, Moskva 1957)

Kleene, S. C., Vesley, R. E.: *The Foundations of Intuitionistic Mathematics*. North-Holland, Amsterdam 1965 (ruský preklad: *Osnovy intuicionističeskoj matematiki.* Nauka, Moskva 1978)

Kline, M.: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford Univ. Press, New York 1972

Kline, M.: *Mathematics – the Loss of Certainty.* Oxford Univ. Press, New York 1980 (ruský preklad: *Matematika – Utrata opredelennosti*. Mir, Moskva 1984)

Kline, M.: *Mathematics and the Search for Knowledge.* Oxford Univ. Press, New York 1985 (ruský preklad: *Matematika – Poisk istiny*. Mir, Moskva 1985)

Körner, S.: *The Philosophy of Mathematics.* Hutchinson Univ. Library, London 1960

Kreisel, G.: *Isledovanija po teorii dokazateľstv*. Mir, Moskva 1981 (zborník prekladov)

Kuhn, T. S.: *Štruktúra vedeckých revolúcií*. Pravda, Bratislava 1981

Kůrka, P.: *Paradoxy a logika.* MFF UK, Praha 1990

Leibniz, G. W.: *O reforme vied.* Vydavateľstvo SAV, Bratislava 1956

Leibniz, G. W.: *Monadologie a jiné práce.* Svoboda, Praha 1982

Locke, J.: *Esej o lidském rozumu*. Svoboda, Praha 1984

Lurija, A. R.: *O historickém vývoji poznávacích procesů*. Academia, Praha 1976

Manin, Ju. I.: *A Course in Mathematical Logic*. Springer-Verlag, New York 1977

Manin, Ju. I.: *Dokazujemoje i nedokazujemoje.* Sovetskoje radio, Moskva 1979

Manin, Ju. I.: *Vyčislimoje i nevyčeslimoje.* Sovetskoje radio, Moskva 1980

Markov, A. A.: *O logike konstruktivnoj matematiki.* Znanie, Moskva 1972

Medvedev, F. A.: *Ranňaja istorija aksiomy vybora*. Nauka, Moskva 1982

Mendelson, E.: *An Introduction to Mathematical Logic*. Van Nostrand, New York 1964 (ruský preklad: *Vvedenie v matematičeskuju logiku*. Nauka, Moskva 1976)

Mikuláš Kuzánsky: *O učenej nevedomosti.* Pravda, Bratislava 1979

Murawski, R.: Semantics for nonstandard languages. *Reports on Math. Logic* **22** (1988), 105-114

Novák, V.: *Fuzzy množiny a jejich aplikace.* Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1990.

Nelson, E.: Internal Set Theory. *Bull. Amer. Math. Soc.* **83** (1977), 1165-1188

Mandelbrot, B. B.: *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman, San Francisco 1982

Patočka, J.: *Úvod do fenomenologické filosofie.* Oikúmené, Praha 1993

Peitgen, H. O., Richter, P. H.: *The Beauty of Fractals*. Springer-Verlag, Berlin 1986

Platón: *Dialógy.* Tatran, Bratislava 1990 (súborné vydanie v 3 zväzkoch)

Poincaré, H.: *O nauke.* Nauka, Moskva 1983 (súborné vydanie prekladov kníh *Veda a hypotéza, Hodnota vedy, Veda a metóda* a *Posledné myšlienky*)

Quine, W. V. O.: *Mathematical Logic*. Norton, New York 1940

Quine, W. V. O.: *From a Logical Point of View*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, MA 1953

Rényi, A.: *Dialógy o matematike.* Alfa, Bratislava 1977

Rényi, A.: *Dialogy o matematice*. Mladá fronta, Praha 1980

Robinson, A.: *Non-Standard Analysis*. North-Holland, Amsterdam 1966

Rosser, J. B.: Extensions of some theorems of Gödel and Church. *J. Symb. Logic* **1** (1936), 87-91

Russell, B.: *The Principles of Mathematics*. Cambridge Univ. Press, Cambridge 1903

Russell, B.: *Introduction to Mathematical Philosophy*. G. Allen and Unwin, London 1919

Russell, B.: *Logika, jazyk a věda*. Svoboda, Praha 1967 (zborník prekladov)

Russell, B.: *Proč nejsem křesťanem a jiné eseje*. Orbis, Praha 1961

Russell, B.: *Problémy filozofie*. P & K, Bratislava 1992

Russell, B., Whitehead, A. N.: *Principia Mathematica* I, II, III. Cambridge Univ. Press, Cambridge 1910, 1912, 1913

Ruzavin, G. I. : *Filosofskije problemy osnovanij matematiky*. Nauka, Moskva 1983

Shoenfield, J.: *Mathematical Logic*. Addison Wesley, Reading, MA, 1967 (ruský preklad: *Matematičeskaja logika*. Nauka, Moskva 1975)

Sousedík, S.: *Jan Duns Scotus a jeho čeští žáci*. Vyšehrad, Praha 1989

Smullyan, R. M.: *Theory of Formal Systems*. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ 1961

Smullyan, R. M.: *Jak jse menuje tahle knížka?* Mladá fronta, Praha 1986

Smullyan, R. M.: *Forever Undecided. A Puzzle Guide to Gödel*. Oxford Univ. Press, New York 1987

Smullyan, R. M.: *Incompleteness Theorems*. Oxford Univ. Press, New York 1992

Spinoza, B.: *Etika*. Svoboda, Praha 1977

Spinoza, B.: *Etika*. Pravda, Bratislava 1986

Struik, D. J.: *Dějiny matematiky*. Orbis, Praha 1963

Šedivý, J., Folta, J. : *Světonázorové problémy matematiky* I. *Kapitoly z historie matematiky do počátku našeho letopočtu*. MFF UK Praha, Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1983

Šedivý, J. a kol.: *Světonázorové problémy matematiky* II. *Kapitoly z historie matematiky a logiky*. MFF UK Praha, Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1984

Šedivý, J. a kol.: *Světonázorové problémy matematiky* III. *Antologie historicky významných textů*. MFF UK Praha, Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1985

Takeuti, G.: *Proof Theory*. North-Holland, Amsterdam 1975 (ruský preklad: *Teorija dokazateľstv*. Mir, Moskva 1978)

Tarski, A.: *Logic, Semantics, Metamathematics*. Papers from 1923 to 1938. Oxford Univ. Press, New York 1956

Tarski, A.: *Collected papers* I-IV. (S. R. Givant, R. N. McKenzie, eds.), Birkhäuser-Verlag, Basel-Boston 1986

Tarski, A.: *Úvod do metodologie deduktívních věd*. Academia, Praha 1969

Thiele, R.: *Matematické důkazy*. Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1986

Trostnikov, V. N.: *Konstruktivnyje processy v matematike*. Mir, Moskva 1983

Vopěnka, P.: *Mathematics in the Alternative Set Theory*. Teubner-Verlag, Leipzig 1979 (ruský preklad s dvoma dodatkami: *Matematika v aľternativnoj teorii množestv*. Mir, Moskva 1983)

Vopěnka, P.: *Úvod do matematiky v alternatívnej teórii množín*. Alfa, Bratislava 1989

Vopěnka, P.: *Rozpravy s geometrií*. Panorama, Praha 1989

Vopěnka, P.: *Druhé rozpravy s geometrií*. Práh a Fokus, Praha 1991

Wang Hao : *Reflections on Kurt Gödel*. M.I.T. Press, Cambridge, MA, 1987

Weyl, H.: *Izbrannyje trudy, Matematika i teoretičeskaja fyzika*. Nauka, Moskva 1984 (zborník prekladov)

Wigner, E. P.: *Symmetries and Reflections*. M.I.T. Press, Cambridge, MA, 1970 (ruský preklad:*Etjudy o simmetrii*. Mir, Moskva 1971)

Zadeh, L. A.: Fuzzy sets. *Information and Control* **8** (1965), 338-353