

# LINEÁRNA ALGEBRA A GEOMETRIA

PAVOL ZLATOŠ

## SYLABY PREDNÁŠKY

### Zimný semester

**0. Množiny a zobrazenia.** Logické spojky a kvantifikátory. Formuly. Množiny. Prienik, zjednotenie, rozdiel a karteziánsky súčin množín. Konečné a nekonečné množiny. Zobrazenia (funkcie). Injektívne, surjektívne a bijektívne zobrazenia. Inverzné zobrazenie. Binárne operácie a ich základné vlastnosti. Multiplikatívne tabuľky. Permutácie. Ekvivalencie a rozklady. Typy matematických dôkazov.

**1. Polia a vektorové priestory.** Základné číselné obory  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{C}$ ; pojem poľa. Polia  $\mathbb{Z}_p$ . Geometrická interpretácia vektorov v  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^3$ , rovnobežníkové pravidlo. Vektorový priestor nad daným poľom skalárov. Príklady vektorových priestorov (riadkovo a stĺpcovo usporiadané  $n$ -tice skalárov, polynómy, rozšírenia polí, funkcie z množiny do poľa a vektorového priestoru).

**2. Základy maticového počtu.** Matice typu  $m \times n$ . Riadky a stĺpce matice. Transponovaná matica. Vektorový priestor matíc typu  $m \times n$  nad daným poľom. Súčin matíc a jeho základné vlastnosti. Blokove matice. Súčin blokových matíc. Matice nad vektorovým priestorom a operácie s nimi.

**3. Sústavy lineárnych rovníc.** Homogénne a nehomogénne sústavy lineárnych rovníc. Maticový zápis sústavy. Matica a rozšírená matica sústavy. Elementárne riadkové a stĺpcove operácie (ERO a ESO). Gaussova-Jordanova eliminačná metóda, úprava matice na redukovaný stupňovitý tvar a riešenie sústavy lineárnych rovníc.

**4. Podpriestory a lineárna nezávislosť.** Lineárny podpriestor vektorového priestoru. Lineárna kombinácia, lineárny obal množiny vektorov. Pojem konečnorozmerného vektorového priestoru. Prienik a súčet lineárnych podpriestorov. Lineárne závislé a lineárne nezávislé usporiadané  $n$ -tice a množiny vektorov.

**5. Báza a dimenzia.** Steinitzova veta. Usporiadané a neusporiadané bázy. Dimenzia vektorového priestoru. Jednoznačnosť vyjadrenia vektora v (usporiadanej) báze. Súradnice vektora vzhľadom na danú bázu, vlastnosti súradnicového zobrazenia. Dimenzia prieniku a súčtu podpriestorov. Direktný súčet podpriestorov. Konečno- a nekonečnorozmerné vektorové priestory. Príklady nekonečnorozmerných priestorov.

**6. Lineárne zobrazenia.** Lineárne zobrazenia – definícia a príklady. Vzor a obraz podpriestoru v lineárnom zobrazení. Jadro a obraz lineárneho zobrazenia; vzťah ich dimenzií. Lineárne izomorfizmy a inverzné lineárne zobrazenia. Izomorfné vektorové priestory. Matica lineárneho zobrazenia vzhľadom na dané bázy. Kompozícia lineárnych zobrazení a násobenie matíc. Priestory lineárnych zobrazení, duál vektorového priestoru.

**7. Inverzné matice a matice prechodu.** Hodnosť matice. Inverzné matice a inverzné lineárne zobrazenia. Regulárne a singulárne matice. Realizácia ERO a ESO pomocou násobenia matíc. Existencia a výpočet inverznej matice. Matica prechodu medzi súradnými bázami. Vplyv zmeny báz na maticu lineárneho zobrazenia.

**8. Afinné podpriestory (lineárne variety).** Body a vektory. Afinné podpriestory vektorových priestorov. Afinné kombinácie. Smerový podpriestor (zameranie) afinného podpriestoru. Prienik a spojenie afinných podpriestorov. Vzájomná poloha afinných podpriestorov. Afinné zobrazenia.

**9. Afinné podpriestory a sústavy lineárnych rovníc.** Podpriestor riešení homogénnej sústavy a jeho báza. Podpriestor riešení nehomogénnej sústavy. Frobeniova veta a riešiteľnosť nehomogénnej sústavy. Parametrické a všeobecné rovnice afinného podpriestoru. Rovnice prieniku a spojenia podpriestorov.

**10. Determinanty.** Determinant ako orientovaný objem. Definujúca rovnosť pre determinant. Jednoznačnosť determinantu ako alternujúcej multilineárnej funkcie. Determinant súčinu matíc. Determinanty regulárnych a singulárnych matíc. Laplaceov rozvoj determinantu. Vplyv ERO a ESO na determinant, výpočet determinantu. Vyjadrenie inverznej matice pomocou algebraických doplnkov. Cramerovo pravidlo.

## Letný semester

**1. Bilineárne a kvadratické formy.** Bilineárne formy. Matica bilineárnej formy vzhľadom na dané bázy. Hodnosť bilineárnej formy. Bilineárne formy a lineárne funkcionály. Symetrické bilineárne formy a symetrické matice. Kvadratické formy. Matica kvadratickej formy vzhľadom na danú bázu. Hodnosť kvadratickej formy. Vplyv zmeny bázy na maticu bilineárnej a kvadratickej formy; kongruentné matice. Diagonalizácia.

**2. Bilineárne a kvadratické formy nad  $\mathbb{R}$ .** Signatúra a jej invariantnosť – Sylvestrov zákon zotrvačnosti. Diagonalizácia bilineárnych a kvadratických foriem nad  $\mathbb{R}$ . Definitnosť. Jacobiho veta a Sylvestrova podmienka. Extrémy funkcií viac premenných.

**3. Euklidovské priestory.** Skalárny súčin. Štandardný skalárny súčin a jeho geometrický význam. Ďalšie príklady skalárnych súčinov. Gramova matica a Gramov determinant. Cauchyho-Schwartzova nerovnosť. Norma (dĺžka) vektora. Odchýlka (uhol) dvoch vektorov. Ortogonálnosť. Kosínusová a Pytagorova veta. Ortogonálne a ortonormálne bázy. Gramov-Schmidtov ortogonalizačný proces.

**4. Ortogonálne projekcie.** Ortogonálny doplnok (ortokomplement) množiny. Kolmý priemet vektora do lineárneho podpriestoru. Vzďialenosť a odchýlka dvoch afinných podpriestorov. Riešenie neriešiteľných sústav; lineárna regresia. Minimálne riešenia. Geometria pravdepodobnosti. Objem, orientovaný objem a vektorový súčin.

**5. Úvod do špeciálnej teórie relativity.** Pseudoskalárny súčin a pseudoeuklidovské priestory. Minkowského časopriestor. Inerciálne svetočiary. Obrátená Cauchyho-Schwartzova nerovnosť. Paradox dvojčiat. Relativistická dilatácia času. Lorentzova transformácia. Relativistická kontrakcia dĺžky.

**6. Unitárne priestory.** Poldruhalineárne formy nad  $\mathbb{C}$ . Matica poldruhalineárnej formy vzhľadom na danú bázu. Hermitovské (komplexne symetrické) poldruhalineárne formy a matice. Kladná definitnosť. Komplexný skalárny súčin. Prenos pojmov a výsledkov z euklidovských priestorov na unitárne priestory. Stavové priestory v kvantovej mechanike

**7. Lineárne operátory.** Matica lineárneho operátora vzhľadom na danú bázu. Vplyv zmeny bázy na maticu lineárneho operátora, podobnosť matíc. Invariantne podpriestory lineárnych operátorov. Vlastné čísla a vlastné vektory lineárneho operátora a matice. Charakteristický polynóm a charakteristická rovnica. Invariantnosť charakteristického polynómu.

**8. Spektrum lineárneho operátora.** Algebraicky uzavreté polia. Význam poľa komplexných čísel – základná veta algebry. Algebraická a geometrická násobnosť. Spektrum lineárneho operátora. Podmienka diagonalizovateľnosti. Príklady nediagonalizovateľných operátorov a matic. Geometrický význam reálnych a komplexných vlastných čísel vo vektorovom priestore nad  $\mathbb{R}$ .

**9. Jordanov kanonický tvar.** Jordanov kanonický tvar matice. Výpočet Jordanovho kanonického tvaru a príslušnej bázy (matice prechodu). Aplikácia: autonómne systémy lineárnych diferenciálnych rovníc. Exponenciála matice.

**10. Grupy.** Abstraktný pojem grupy. Komutatívne (abelovské) a nekomutatívne grupy. Príklady grúp. Grupy transformácií. Podgrupy danej grupy. Homomorfizmy grúp. Jadro a obraz homomorfizmu. Izomorfizmus grúp a izomorfné grupy. Príklady podgrúp a homomorfizmov. Cyklické grupy. Grupa automorfizmov danej grupy. Priamy a polopriamy súčin grúp. Cayleyho veta o reprezentácii.

**11. Lineárne a afinné grupy.** Všeobecná lineárna grupa  $GL(n, K)$  a špeciálna lineárna grupa  $SL(n, K)$ . Bilineárne a kvadratické formy ako invarianty. Ortogonálna grupa  $O(n)$ , špeciálna ortogonálna grupa  $SO(n)$  a ich geometrický význam. Unitárna grupa  $U(n)$  a špeciálna unitárna grupa  $SU(n)$ . Grupa posunutí a afinné rozšírenia lineárnych grúp. Grupa izometrií euklidovského priestoru. Izometrie v rovine a v trojrozmernom priestore. Lorentzove grupy  $O(k, n)$ ,  $SO(k, n)$  a Poincarého grupa.

**12. Spektrálny rozklad.** Lineárne operátory v euklidovských a unitárnych priestoroch. Adjungované (združené) operátory a vzťah ich matic. Samoadjungované operátory a symetrické resp. hermitovské matice. Vlastné čísla a vlastné vektory samoadjungovaných operátorov. Projektory. Spektrálny rozklad samoadjungovaného operátora a hermitovskej matice.

**13. Veta o hlavných osiach.** Dôsledky spektrálneho rozkladu symetrických matic pre bilineárne a kvadratické formy nad  $\mathbb{R}$ . Ortogonálna podobnosť matic a veta o hlavných osiach. Metrická klasifikácia kvadrík v dvoj- a trojrozmernom euklidovskom priestore.

## LITERATÚRA

- [1] L. Bican, *Lineárna algebra*, Matematický seminár, SPN, Praha, 1979, 2. prepracované vydanie: Academia, Praha, 2003.
- [2] G. Birkhoff, S. Mac Lane, *Prehľad modernej algebry*, Alfa, Bratislava, 1979.
- [3] A. K. Faddejev, J. S. Sominskij, *Zbierka úloh z vyššej algebry*, Alfa, Bratislava, 1968.
- [4] P. Kaprálik, J. Tvarožek, *Zbierka riešených príkladov z lineárnej algebry a analytickej geometrie*, Alfa, Bratislava, 1987.
- [5] T. Katriňák a kol., *Algebra a teoretická aritmetika I*, Alfa, Bratislava, 1985, 2. vydanie: Univerzita Komenského, Bratislava, 1995.
- [6] J. Korbaš, *Lineárna algebra a geometria I*, skriptá FMFI UK, Bratislava, 2003.
- [7] S. Mac Lane, G. Birkhoff, *Algebra*, Alfa, Bratislava, 1973, 2. vydanie: 1978.
- [8] L. Motl, M. Zahradník, *Pěstujeme lineárnu algebru*, Univerzita Karlova, vydavatelství Karolinum, Praha, 1995.
- [9] J. Slovák, *Lineárna algebra*, skriptá PŘF MU, Brno, 1995, elektronický učebný text dostupný na adrese <http://www.math.muni.cz/~slovak>.
- [10] J. Smital a kol., *Úvod do lineárnej algebry*, skriptá PF UK, Bratislava, 1978.
- [11] J. Smital, E. Gedeonová, *Lineárna algebra*, skriptá MFF UK, Bratislava, 1981.
- [12] F. Šik, *Lineárna algebra zaměřená na numerickou analýzu*, skriptá PŘF MU, Brno, 1998.
- [13] P. Zlatoš, *Lineárna algebra a geometria*, skriptá FMFI UK, Bratislava, 2003, elektronický učebný text dostupný na adrese <http://thales.doa.fmph.uniba.sk/zlatos/1a>.
- [14] Š. Znám, *Lineárna algebra*, skriptá PF UK, Bratislava, 1975.

## ZÁSADY KLASIFIKÁCIE

Približne v polovici semestra sa bude konať písomka, za ktorú možno získať maximálne 10 bodov. *Písomku nemožno opakovať*, napr. z dôvodu slabého výsledku. Iba študenti, ktorí sa jej z vážnych dôvodov nemohli zúčastniť, budú mať možnosť napísať si ju v náhradnom termíne.

Záverečná skúška sa skladá z *povinnej* písomnej a *nepovinnej* ústnej časti. Z písomnej časti možno získať maximálne 30 bodov. *Nutnou, nie však postačujúcou podmienkou úspešného absolvovania skúšky je zisk aspoň 10 bodov z tejto písomky.* Body z oboch písomiek sa potom sčítajú. Celkovo tak možno získať maximálne 40 bodov. Na základe výsledného súčtu možno *bez ústnej skúšky* získať nasledujúce hodnotenie:

30 – 40 bodov :	<b>B</b>
25 – 29 bodov :	<b>C</b>
21 – 24 bodov :	<b>D</b>
17 – 20 bodov :	<b>E</b>
0 – 16 bodov :	<b>F<sub>x</sub></b>

Teda špeciálne *hodnotenie A* nemožno získať bez *ústnej skúšky*.

Zájemci o lepšie hodnotenie sa môžu *dobrovoľne* zúčastniť ústnej skúšky a uchádzať sa oň podľa nasledujúceho kľúča:

29 ↗	<b>A</b>	
24 ↗	<b>B</b>	
21 ↗	<b>C</b>	
19 ↗	<b>D</b>	
16 ↗	<b>E</b>	1. opravný termín
15 ↗	<b>E</b>	2. opravný termín

Symbol  $n \nearrow \mathbf{X}$  znamená, že o hodnotenie **X** sa môžu uchádzať len tí študenti, ktorí získali v súčte najmenej  $n$  bodov.

*Pri prejavenej závažnej nevedomosti na ústnej skúške sa uchádzačovi zníži už dosiahnuté hodnotenie o jeden stupeň.*

Dolná bodová hranica na hodnotenie **E** je *minimálnou požiadavkou* na absolvovanie skúšky. Jednako na prvom resp. druhom opravnom termíne sa študenti, ktorí sa umiestnili tesne pod touto hranicou, môžu pokúsiť na ústnej skúške získať hodnotenie **E** podľa uvedeného kľúča.

**Kontakt:** Katedra algebry a teórie čísel FMFI UK, miestnosť č. M 128

**E-mail:** zlatos@fmph.uniba.sk